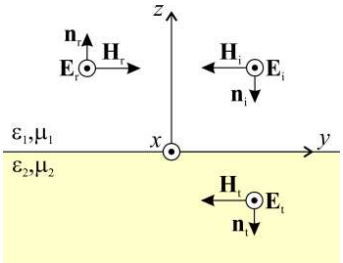
Одбијање и преламање таласа на граници две средине

Посматрамо равну граничну површ између две линеарне хомогене средине без губитака, параметара ε_1, μ_1 и ε_2 μ_2.



Слика 1.

Из прве средине наилази униформан раван линеарно поларизован талас **нормално** на ту површ. Вектори електричног и магнетског поља леже у равни која је паралелна xOy равни.

Усвајамо координатни систем тако да је вектор електричног поља паралелан x-оси.

С обзиром да су правац и смер простирања таласа утврђени јединичним вектором $\mathbf{n}_\mathrm{i} = -\mathbf{i}_z$, оријентацију вектора магнетског поља не можемо да бирамо произвољно! Векторски производ $\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} \times \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i}$ мора да буде у правцу вектора $\mathbf{n}_\mathrm{i}$. Дакле, вектор магнетског поља мора да буде у смеру супротном од смера y-осе.

Векторе електричног и магнетског поља инцидентног таласа можемо да представимо

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}(z) = \underline{E}_{\mathrm{i}0} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \mathbf{i}_x ,$$

$$\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i}(z) = -\frac{\underline{E}_{\mathrm{i}0}}{Z_1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \mathbf{i}_y$$

где је

$\underline{E}_{\mathrm{i}0}$ комплексни представник вектора инцидентног електричног поља у равни $z = 0$,

$\beta_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda_1} = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$, фазни коефицијент у средини 1,

$Z_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$, таласна импеданса у средини 1,

Поинтингов вектор инцидентног таласа је

$$\mathbf{P}_\mathrm{i} = \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} \times \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i}^* = \frac{E_{\mathrm{i}0}^2}{Z_1}(-\mathbf{i}_z),$$

и он је чисто реална величина. Правац и смер Поинтинговог вектора поклапају се са правацем и смером простирања таласа!

Рефлексија таласа

Због нагле промене параметара средине, инцидентни талас се делимично рефлектује, а делимично пролази у другу средину.

Талас који се рефлектује од граничне површи зовемо **рефлектовани** талас, а талас који пролази у другу средину зовемо **трансмитовани** талас.

Да би се задовољили гранични услови, рефлектовани талас мора да буде исто поларизован као и инцидентни талас

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}}(z)=\underline{E}_{\mathrm{r0}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\mathbf{i}_x\,,\ z>0$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{r}}(z)=\frac{\underline{E}_{\mathrm{r0}}}{\mathrm{Z}_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\mathbf{i}_y\,,\ z>0$$

где је

$\underline{E}_{\mathrm{r0}}$ **непознати** комплексни представник вектора инцидентног електричног поља у равни $z=0$,

$\mathbf{n}_{\mathrm{r}}=\mathbf{i}_z$, јединични вектор који показује правац и смер простирања рефлектованог таласа.

$\mathbf{P}_{\mathrm{r}}=\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}}\times\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{r}}^{*}=\dfrac{E_{\mathrm{r0}}^2}{Z_1}\mathbf{i}_z$, Поинтингов вектор рефлектованог таласа.

Обратити пажњу на смер вектора магнетског поља.

Порекло рефлектованог таласа најлакше је објаснити у случају када је прва средина вакуум, а друга немагнетски диелектрик. У том случају, рефлектовани талас потиче од поларизационих струја у другој средини.

Остали случајеви се могу слично објаснити, али је зато потребно познавање запреминске теореме еквиваленције која превазилази обим овог курса.

Трансмитовани талас

Трансмитовани талас постоји само у другој средини ($z<0$).

Да би се задовољили гранични услови, трансмитовани талас мора да буде исто поларизован као и инцидентни талас

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{t}} = \underline{E}_{\mathrm{t0}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 z} \mathbf{i}_x \,, \; z<0$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{t}} = -\frac{\underline{E}_{\mathrm{t0}}}{\mathrm{Z}_2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 z} \mathbf{i}_y \,, \; z<0$$

где је

$\underline{E}_{\mathrm{t0}}$ **непознати** комплексни представник вектора трансмитованог електричног поља у равни $z=0$,

$\beta_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda_2} = \omega\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$, фазни коефицијент у средини 2,

$Z_2 = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$, таласна импеданса у средини 2,

$\mathbf{n}_{\mathrm{t}} = -\mathbf{i}_z$, јединични вектор који показује правац и смер простирања трансмитованог таласа.

У случају када је прва средина вакуум, а друга немагнетски диелектрик, трансмитовани талас представља збир инцидентног таласа и таласа који стварају поларизационе струје.

Гранични услови

На раздвојној средини морају да важе гранични услови за тангенцијалне компоненте електричног и магнетског поља

$$\underline{\mathbf{E}}_{1\tan} = \underline{\mathbf{E}}_{2\tan} \,.$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{1\tan} = \underline{\mathbf{H}}_{2\tan} \,.$$

У другом случају, тангенцијалне компоненте су једнаке јер нема површинских струја. **Површинске струје постоје само на површи савршеног проводника.**

Када талас у првој средини напишемо како суперпозицију инцидентног и рефлектованог таласа, добијамо

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}(z=0) + \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}}(z=0) = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{t}}(z=0),$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{i}}(z=0) + \underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{r}}(z=0) = \underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{t}}(z=0),$$

односно

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0} + \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}0} = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{t}0} ,$$

$$\frac{\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0}}{Z_1} - \frac{\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}0}}{Z_1} = \frac{\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{t}0}}{Z_2} .$$

Када другу једначину помножимо са Z_1, следи да је

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0} - \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}0} = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{t}0} \frac{Z_1}{Z_2} .$$

Када је саберемо са првом, добија се

$$2\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0} = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{t}0} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right),$$

одакле можемо да изразимо трансмитовани талас у функцији инцидентног таласа

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{t}0} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0} = T\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0} .$$

Однос трансмитованог и инцидетног таласа назива се **коефицијент трансмисије**.

$$T = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} .$$

Када су обе средине без губитака, коефицијент трансмисије је реалан број. **У општем случају, коефицијент трансмисије је комплексна величина.**

На сличан начин можемо да изразимо рефлектовани талас преко инцидентног таласа

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}0} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0} = R\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0} .$$

Одакле се добија **коефицијент рефлексије**

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}} .$$

Слично као и коефицијент трансмисије, коефицијент рефлексије је у општем случају комплексна величина.

Што је већа разлика између електромагнетских параметара прве и друге средине биће јача рефлексија.

У многим ситуацијама нам је од интереса да коефицијент рефлексије буде што је могуће мањи, односно да сва енергија из прве средине пређе у другу средину. У том случају, ако постоји велика разлика између параметара прве и друге средине између њих се умеће антирефлексивни слој.

У случају када су обе средине немагнетске, $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$, коефицијент рефлексије гласи

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}.$$

Укупно поље у првој средини је збир инцидентног и рефлектованог таласа

$$\underline{\mathbf{E}}_1(z) = \underline{E}_{\mathrm{i}0}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} + R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\right)\mathbf{i}_x = \underline{E}_{\mathrm{i}0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}\left(1 + R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta_1 z}\right)\mathbf{i}_x,$$

$$\underline{\mathbf{H}}_1(z) = -\frac{E_{\mathrm{i}0}}{\mathrm{Z}_1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} - R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\right)\mathbf{i}_y = -\frac{E_{\mathrm{i}0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}}{\mathrm{Z}_1}\left(1 - R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta_1 z}\right)\mathbf{i}_y.$$

и може да замисли као суперпозиција прогресивног и стојећег таласа.

Претпоставимо да је $R > 0$, максимална вредност електричног поља достиже се на висинама за које важи

$$\left|\underline{\mathbf{E}}_1(z)\right|_{\max} = 1 + R \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta_1 z} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\beta_1 z = 2k\pi \Rightarrow \quad z_{\max} = k\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Слично, електрично поље је минимално на висинама

$$\left|\underline{\mathbf{E}}_1(z)\right|_{\min} = 1 - R \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta_1 z} = -1 \quad \Rightarrow \quad 2\beta_1 z = (2k+1)\pi \Rightarrow \quad z_{\min} = (2k+1)\frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Када је $R < 0$, $z_{\min}$ и $z_{\max}$ мењају места.

Однос

$$s = \frac{\left|\underline{\mathbf{E}}_1(z)\right|_{\max}}{\left|\underline{\mathbf{E}}_1(z)\right|_{\min}} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|},$$

назива се коефицијент стојећег таласа.

Средине са губицима

Претходна анализа може да се генерализује за случај две произвољне линеарне средине са губицима.

У том случају, таласне импедансе постају комплексне величине,

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\underline{\varepsilon}_e}} \ ,$$

при чему се уместо пермитивности користи еквивалентна комплексна пермитивност $\underline{\varepsilon}_e = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$.

Коефицијенти рефлексије и трансмисије имају формално исти облик, једино што су сада комплексне величине

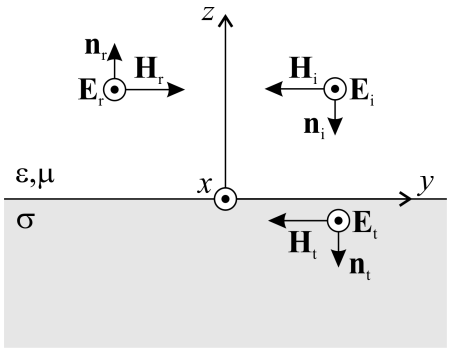
$$\underline{R} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \ , \quad \underline{T} = \frac{2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \ .$$

Уместо фазног коефицијента, користи се комплексни коефицијент простирања

$$\gamma = j\omega\sqrt{\underline{\varepsilon}_e\mu} = \alpha + j\beta \ .$$

Губици у добром проводнику

Посматрамо сада ситуацију када талас из диелектрика наилази нормално на добар проводник.



Слика 2.

Када је друга средина добар проводник, таласна импеданса је приближно

$$\underline{Z}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}}} \approx \sqrt{\mathrm{j}\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi\mu f}{\sigma}} = R_\mathrm{s}(1+\mathrm{j}).$$

Коефицијент простирања је приближно

$$\gamma_2 = \mathrm{j}\omega\sqrt{\underline{\varepsilon}_\mathrm{e}\mu} \approx \mathrm{j}\omega\sqrt{-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\mu} = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\sigma} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\pi\mu f\sigma} = \alpha + \mathrm{j}\beta.$$

Такође, важи да је $Z_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} >> \underline{Z}_2$, те је коефициент рефлексије приближно

$$\underline{R} = \frac{\underline{Z}_2 - Z_1}{Z + \underline{Z}_2} \approx \frac{-Z_1}{Z_1} = -1,$$

односно исти као код савршеног проводника.

Коефицијент трансмисије је приближно

$$\underline{T} = \frac{2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \approx \frac{2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}.$$

Општи изрази за трансмитовано поље

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{t} = \underline{E}_{\mathrm{t}0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 z}\mathbf{i}_x, \ z<0,$$

$$\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{t} = -\frac{\underline{E}_{\mathrm{t}0}}{Z_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 z}\mathbf{i}_y, \ z<0,$$

у добром проводнику постају

$$\underline{\mathbf{E}}_2 = \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{t} = \frac{2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0}\mathrm{e}^{\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\mathbf{i}_x\,,\ \ z<0\,,$$

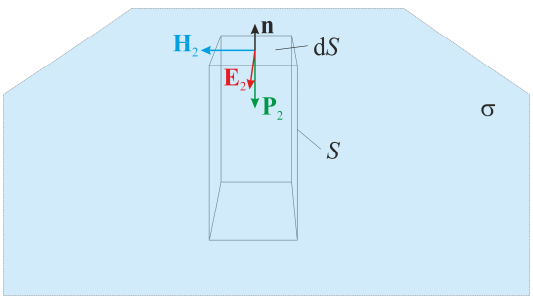
$$\underline{\mathbf{H}}_2 = \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{t} = -\frac{2}{\underline{Z}_1}\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0}\mathrm{e}^{\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\mathbf{i}_y\,,\ \ z<0\,,$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi\mu f\sigma}\ .$$

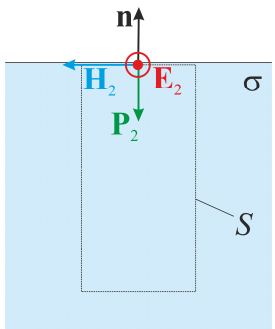
Трансмитовани талас експоненцијално опада због Џулових губитака. Дубина продирања таласа, дефинише се као место на коме интензитет таласа опадане на e^{-1} своје почетне вредности

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu f\sigma}}\ .$$

Џулови губици у проводнику могу се одредити применом Поинтингове теореме. У ту сврху посматрамо површ као на слици 3.



Слика 3а



Слика 3б

Поинтингова теорема у комплексном облику за домен без генератора гласи

$$0 = P_\mathrm{J} + \mathrm{j}\omega\int_v \left(\mu\left\|\underline{\mathbf{H}}_2\right\|^2 - \varepsilon\left\|\underline{\mathbf{E}}_2\right\|^2\right)\mathrm{d}v + \oint_S \left(\underline{\mathbf{E}}_2 \times \underline{\mathbf{H}}_2^*\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\ .$$

Изједначавањем реалних делова добија се

$$P_\mathrm{J} = -\mathrm{Re}\left\{\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}}_2 \times \underline{\mathbf{H}}_2^*\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\right\},$$

при чему се користи спољашња нормала на површ.

Ако се користи нормала усмерена ка унутра, интеграл мења знак

$$P_\mathrm{J} = \mathrm{Re}\left\{\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}}_2 \times \underline{\mathbf{H}}_2^*\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\right\}.$$

Флукс Поинтинговог вектора различит је од нуле само на горњем базису.

На доњем базису је поље нула јер се налази дубоко у проводнику, а на омотачу су нормала и Поинтингов вектор паралелни.

Стога је снага Џулових губитака

$$P_{\mathrm{J}} = \mathrm{Re}\left\{ \oint_{S_{\mathrm{bazisa}}} \left(\underline{\mathbf{E}}_2 \times \underline{\mathbf{H}}_2^* \right) \mathrm{d}\mathbf{s} \right\}.$$

Ако је површ базиса мала, Поинтингов вектор је приближно константан у свакој тачки базиса.

Одатле следи да је

$$\mathrm{d}P_{\mathrm{J}} = \mathrm{Re}\left\{ \oint_{S_{\mathrm{bazisa}}} \left(\underline{\mathbf{E}}_2 \times \underline{\mathbf{H}}_2^* \right) \mathrm{d}\mathbf{s} \right\} \approx \mathrm{Re}\left\{ \underline{Z}_2 \left\| \mathbf{H}_2 \right\|^2 \mathrm{d}S \right\},$$

јер је

$$\underline{\mathbf{E}}_2 \times \underline{\mathbf{H}}_2^* = \frac{\left\| \underline{\mathbf{E}}_2 \right\|^2}{\underline{Z}_2} = \underline{Z}_2 \left\| \underline{\mathbf{H}}_2 \right\|^2.$$

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{J}}}{\mathrm{d}S} = \mathrm{Re}\left\{ \underline{Z}_2 \right\} \left\| \mathbf{H}_2 \right\|^2 = R_{\mathrm{s}} \left\| \mathbf{H}_2 \right\|^2$$

На површи доброг проводника, вектор магнетског поља има приближно само тангенцијалну компоненту

$$\underline{H}_2(z=0) = \underline{H}_{\tan}.$$

Одатле је укупна снага Џулових губитака у проводнику

$$P_{\mathrm{J}} = \int_S R_{\mathrm{s}} H_{\tan}^2 \mathrm{d}S.$$

На површи раздвојној површи диелектрик – проводник, важи

$$\underline{H}_2(z=0) = \underline{H}_{\mathrm{t0}} = -\frac{2E_{\mathrm{i0}}}{\mathrm{Z}_1}.$$

где S означава површ проводника.

У проводнику постоје **запреминске струје** чија је густина

$$\underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{t}} = \sigma \underline{\mathbf{E}}_2 = \frac{2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \sigma \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i0}} \mathrm{e}^{\alpha z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} \mathbf{i}_x = \frac{2\underline{\gamma}_2 \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i0}}}{\underline{Z}_1} \mathrm{e}^{\alpha z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} \mathbf{i}_x, \ z < 0.$$

Струје експоненцијално слабе са удаљавањем од граничне површи, али нису површинске.

Површинске струје постоје само у случају савршених проводника.