Kompletan obavezni dopunski materijal iz Elektromagnetike

za odsek OF

Evanescentni (iščezavajući) talasi

- Prvi deo obaveznog dopunskog materijala iz Elektromagnetike za odsek OF -

9. jun 2006.

1 Normalna incidencija ravnog, uniformnog prostoperiodičnog talasa na jonizovani gas

Podsetimo se prvo da se jonizovani gas za prostoperiodično elektromagnetsko (EM) polje učestanosti f ponaša kao savršeni dielektrik permitivnosti

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{f_c^2}{f^2}\right). \tag{1}$$

Permitivnost ε' naziva se *prividna permitivnost*, a f_c *kritična učestanost* jonizovanog gasa. Ako je $f > f_c$ tada je $\varepsilon' > 0$ i time je uslov da se u jonizovanom gasu može prostirati talas učestanosti f ispunjen, pa se jonizovani gas ponaša kao realni dielektrik. Ovaj uslov nazvaćemo *uslov prostiranja*.

Ako je, međutim, $f < f_c$, tada je $\varepsilon' < 0$, pa se jonizovani gas ponaša kao fiktivni dielektrik negativne permitivnosti. Uslov prostiranja nije ispunjen, tj. u ovom gasu se ne može prostirati talas učestanosti f, ali u njemu može postojati specifično EM polje koje se naziva *evanescentni "talas"* i njega ćemo u ovom tekstu proučiti u najosnovnijim crtama. Termin "talas" u ovom kontekstu treba shvatiti uslovno, pa stoga stavljamo znakove navoda.

1.1 Slučaj dve sredine

Neka ravan uniforman EM talas, učestanosti f (ugaone učestanosti $\omega = 2\pi f$), prostirući se u smeru $+z$-ose, nailazi upravno na homogen jonizovani gas kritične učestanosti f_c ($f < f_c$). Sredina je svuda vakuum. Iako je prividna permitivnost gasa (data jednačinom (1)) negativna, proračun polja u obe sredine je u matematičkom smislu isti kao da desni poluprostor ispunjava savršen dielektrik. Prema tome, talasna impedansa gasa je

$$\underline{Z}_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon'}} = \mathrm{j}\sqrt{\frac{\mu_0}{-\varepsilon'}} \tag{2}$$

i čisto je imaginarna. (Može se pokazati, rešavanjem talasne jednačine, da rešenje sa znakom minus, $\underline{Z}_2 = -\mathrm{j}\sqrt{\frac{\mu_0}{-\varepsilon'}}$ otpada.) Kompleksni koeficijent prostiranja je

$$\underline{\gamma} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\varepsilon'\mu_0} = \pm\alpha, \qquad \alpha = \omega\sqrt{(-\varepsilon')\mu_0} > 0 \tag{3}$$

i čisto je realan, a konstanta α je koeficijent slabljenja. Polje u sredini 2 se može prikazati kao superpozicija dva polja — jednog koji od z zavisi kao $\mathrm{e}^{+\alpha z}$ i drugog koji od z zavisi kao $\mathrm{e}^{-\alpha z}$. S obzirom da sa porastom z polje ne može neograničeno rasti (granični uslov u beskonačnosti), rešenja sa $\mathrm{e}^{+\alpha z}$ otpada, pa je vektor $\boldsymbol{E}$ u sredini 2

$$\underline{\boldsymbol{E}}_2 = \underline{E}_{\mathrm{t}0}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\boldsymbol{i}_x, \tag{4}$$

gde je

$$\underline{E}_{\mathrm{t}0} = \underline{T}\,\underline{E}_{\mathrm{i}0}, \quad \underline{T} = \frac{2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + Z_1}, \quad Z_1 = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \tag{5}$$

Ovde smo pretpostavili da je vektor $\boldsymbol{E}$ incidentnog talasa linijski polarizovan i u smeru x-ose. Time je i transmitovani "talas" linijski polarizovan i vektor $\underline{\boldsymbol{E}}_2$ u istom smeru. (Čitaocu se ostavlja da odredi vektor $\underline{\boldsymbol{H}}$ u sredini 2.)

Polje u sredini 2 naziva se *evanescentni (iščezavajući) "talas"*. Ovo polje nije EM talas, jer izraz (4) ne sadrži faktor oblika $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$ $(\beta > 0)$, koji bi predstavljao prostiranje faze u smeru $+z$-ose. Dakle, ako se u nekoj sredini kao rešenje talasne jednačine dobije polje koje od podužne koordinate zavisi isključivo kao $\mathrm{e}^{\pm\alpha z}$ $(\alpha > 0)$, to rešenja naziva se evanescentni "talas". Na drugi način rečeno, evanescentni "talas" je rešenje talasne jednačine u kome je kompleksni koeficijent prostiranja čisto realan.

Ovde treba uočiti razliku između evanescentnog "talasa" i talasa koji se prostire kroz sredinu sa gubicima, i pored toga što oba sadrže eksponencijalni faktor $\mathrm{e}^{-\alpha z}$. Naime, u sredini sa gubicima zavisnost električnog i magnetskog polja talasa (koji se npr. prostire u smeru $+z$-ose) je oblika $\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$ i njegovo eksponencijalno slabljenje je posledica *gubitaka*, tj. pretvaranja energije EM polja u Džulove gubitke. Kod evanescentnog "talasa" (koji se "prostire" u smeru $+z$-ose) slabljenje se izražava istim faktorom ($\mathrm{e}^{-\alpha z}$), ali ono nije posledica gubitaka, već specifične strukture polja u toj sredini.

Koeficijent refleksije talasa na razdvojnoj površi dve sredine je

$$\underline{R} = \frac{\underline{Z}_2 - Z_1}{\underline{Z}_2 + Z_1}. \tag{6}$$

Kako je u ovoj formuli brojilac jednak konjugovanoj vrednosti imenioca, to je $|\underline{R}| = 1$, pa se sva energija incidentnog talasa reflektuje nazad u sredinu 1. Čitaocu se ostavlja da pokaže da je realan deo Pointingovog vektora na razdvojnoj površi (tj. u tačkama $z = 0^+$ i $z = 0^-$) jednak nuli.

1.2 Slučaj tri sredine

Pretpostavimo sada da ravan uniforman prostoperiodičan talas, učestanosti $f < f_\mathrm{c}$, nailazi na sloj homogenog jonizovanog gasa debljine d (kao na sl. 344.1 i 344.2 iz "Ispitne zbirke", gde su sredine 1 i 3 vakuum, a sredina 2 je jonizovani gas). Za razliku od prethodnog slučaja (kada je sloj jonizovanog gasa bio beskonačno debeo), sada u gasu postoje uslovi za pojavu i evanescentnog "talasa" koji je srazmeran se $\mathrm{e}^{+\alpha z}$, jer za sredinu 2 više ne postoji granični uslov u beskonačnosti. Polje u sve tri sredine se sada može računati na formalno potpuno isti način kao da je sredina 2 savršen dielektrik. Dakle, u sredini 2 postoji i "direktni" i "reflektovani" evanescentni "talas". Ova dva polja od z-koordinate zavise kao $\mathrm{e}^{-\alpha z}$ i $\mathrm{e}^{+\alpha z}$, respektivno. U sredini 1 postoji klasični reflektovani talas.

Interesantno je da je sada u sredini 3 rešenje talasne jednačine *progresivan* talas. Dakle, i pored toga što u sredini 2 ne postoje uslovi za prostiranje talasa, EM polje prodire i u sredinu 3 i u njoj postoji transmitovani talas. Ovaj talas je, međutim, dodatno oslabljen usled evanescentnog talasa u sredini 2. Na ovaj način sloj jonizovanog gasa funkcioniše kao oslabljivač (atenuator) talasa.

Odredimo efektivnu vrednost transmitovanog talasa (talasa u sredini 3). Ovaj talas je oblika

$$\underline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{t}} = \underline{E}_{\mathrm{t}0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(z-d)}\boldsymbol{i}_x, \tag{7}$$

gde treba odrediti kompleksnu efektivnu vrednost $\underline{E}_{\mathrm{t}0}$. Radi pojednostavljenja proračuna zanemarićemo "reflektovani" evanescentni "talas" uz levu razdvojnu površ ($z = 0^+$), tj. zanemarićemo višestruku "refleksiju" evanescentnog "talasa". (Ovo je vrlo opravdana aproksimacija, osim u slučaju kada je d malo — reda veličine $1/\alpha$.) Sada su granični uslovi na levoj razdvojnoj površi isti kao da je sredina 2 beskonačna, pa je "direktan" evanescentni "talas" u sredini 2

$$\underline{\boldsymbol{E}}_{2\mathrm{i}} = \underline{E}_{\mathrm{i}0}\underline{T}_{12}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\boldsymbol{i}_x, \tag{8}$$

gde je $\underline{T}_{12} = (2\underline{Z}_2)/(\underline{Z}_2 + Z_1)$, $Z_1 = Z_0$. Na desnoj razdvojnoj površi granični uslovi su ponovo formalno isti kao da postoje samo dve sredine, jer u levoj sredini (sredini 2) postoji "direktni" i "reflektovani" (evanescentni) "talas", a u desnoj sredini (sredini 3) samo transmitovani talas. Zato je

$$\underline{E}_{\mathrm{t}0} = \underline{E}_{\mathrm{i}0}\underline{T}_{12}\,\mathrm{e}^{-\alpha d}\underline{T}_{23}, \tag{9}$$

gde je $\underline{T}_{23} = (2Z_3)/(Z_3 + \underline{Z}_2)$, $Z_3 = Z_0$. Dakle, slabljenje talasa izraženo u decibelima, linearno zavisi od debljine sloja d (uz već navedenu pretpostavku da sloj nije jako tanak.)

2 Totalna refleksija ravnog, uniformnog prostoperiodičnog talasa na razdvojnoj površi dva dielektrika

2.1 Slučaj dve sredine

Pretpostavimo sada da ravan talas nailazi iz dielektrika 1 na razdvojnu površ sa dielektrikom 2, a pod upadnim uglom θ većim od θ_{TOT} ($\theta_{\mathrm{TOT}} = \arcsin c_1/c_2$, $c_1 < c_2$) (v. sliku 13.8 iz "Elektromagnetike" B.Popovića). Analizirajmo polje u sredini 2. Rešenje za EM polje u obe sredine je formalno (matematički) potpuno isto kao da je $\theta < \theta_{\mathrm{TOT}}$, što se može pokazati rešavanjem talasne jednačine u obe sredine. Naime, talas u sredini 2 je oblika

$$\underline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{t}} = \underline{E}_{\mathrm{t}0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2\boldsymbol{n}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}, \tag{10}$$

gde je $\beta_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ fazni koeficijent u sredini 2, $\boldsymbol{n}_{\mathrm{t}} = \{0, \sin\theta_{\mathrm{t}}, -\cos\theta_{\mathrm{t}}\}$ je ort u smeru prostiranja transmitovanog talasa, $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$ je radijus vektor proizvoljne tačke u prostoru i $\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}$ je referentni ort vektora $\underline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{t}}$ (koji zavisi od polarizacije talasa).

Za razliku od slučaja $\theta < \theta_{\mathrm{TOT}}$, sada je

$$\sin\theta_{\mathrm{t}} = \frac{c_2}{c_1}\sin\theta > 1, \tag{11}$$

što je moguće samo ako je ugao θ_{t} kompleksan (u formalno matematičkom smislu). Da bismo videli šta to znači u stvarnom – fizičkom smislu, transformisaćemo eksponent u izrazu (10). Kao prvo, u izrazu za ort $\boldsymbol{n}_\mathrm{t}$, $\sin\theta_\mathrm{t}$ je dato jednačinom (11), a

$$\cos\theta_\mathrm{t} = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta_\mathrm{t}} = \pm\mathrm{j}K, \quad K = \sqrt{\sin^2\theta_\mathrm{t} - 1} > 0, \tag{12}$$

gde ćemo znak '+' ili '-' odabrati malo kasnije. Sada je eksponencijalni faktor u (10)

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 \boldsymbol{n}_\mathrm{t}\cdot\boldsymbol{r}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 y\sin\theta_\mathrm{t}}\,\mathrm{e}^{\mp\beta_2 zK}. \tag{13}$$

Kako polje u sredini 2 ne može neograničeno rasti za $z \to -\infty$, to u (13) i (12) treba odabrati donji znak. Konačno je

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 \boldsymbol{n}_\mathrm{t}\cdot\boldsymbol{r}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 y\sin\theta_\mathrm{t}}\,\mathrm{e}^{+\beta_2 zK}. \tag{14}$$

Dakle, u sredini 2 postoji specifičan (neuniforman) talas koji se prostire u smeru y-ose (duž razdvojne površi), a čija amplituda opada eksponencijalno (kao $\mathrm{e}^{\alpha z}$) sa rastojanjem od razdvojne površi, sa konstantom slabljenja

$$\alpha = \beta_2 K. \tag{15}$$

Talas sa ove dve osnovne osobine naziva se površinski talas. Vidimo da površinski talas u smeru normalnom na razdvojnu površ ima karakteristike evanescentnog "talasa", pa se u literaturi ponegde i naziva evanescentni talas.

Efektivna vrednost električnog polja ovog talasa uz razdvojnu površ (tj. za $z = 0^-$) dobija se množenjem efektivne vrednosti vektora $\boldsymbol{E}$ incidentnog talasa modulom koeficijenta transmisije za odgovarajuću polarizaciju (normalnu ili paralelnu)

$$E_\mathrm{t} = |\underline{E}_\mathrm{t0}| = E_\mathrm{i}|\underline{T}_\mathrm{n,p}|, \tag{16}$$

gde se koeficijent transmisije (Frenelov koeficijent) računa na uobičajen način, osim što je $\cos\theta_\mathrm{t}$ sada imaginarno.

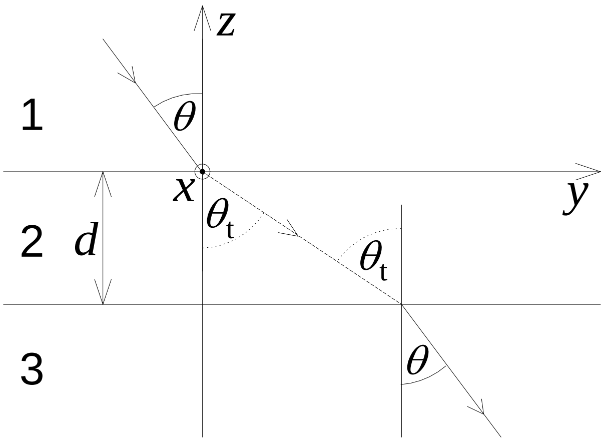
2.2 Slučaj tri sredine

Pretpostavimo sada da ravan talas nailazi iz dielektrika 1 na ploču (sloj) od dielektrika 2 debljine d (slika 1), a neka dielektrik sa druge strane ploče (dielektrik 3) ima iste osobine kao dielektrik 1. Neka su sva tri dielektrika savršena i neka incidentni talas nailazi pod upadnim uglom većim od θ_TOT.

Iz generalisanog Snelovog zakona sledi da je prelomljeni ugao u sredini 3 jednak upadnom uglu u sredini 1. Kako je ovaj ugao realan, to u sredini 3 postoji progresivan ravan talas. Dakle, u sredini 3 postoji ravan uniforman talas koji se prostire u istom smeru kao incidentni talas. Odredimo njegovu efektivnu vrednost.

Za razliku od kose incidencije na razdvojnu površ dve sredine, u slučaju tri sredine u srednjoj sredini (sredini 2) postoji i reflektovani talas. Dakle, osim talasa koji od z-koordinate zavisi kao $\mathrm{e}^{+\alpha z}$, gde je α dato formulom (15), postojaće i talas koji od z zavisi kao $\mathrm{e}^{-\alpha z}$. Međutim, radi uprošćenja računa, ovaj drugi talas ćemo zanemariti na prvoj razdvojnoj površi (za $z = 0-$). (Isto smo učinili kod normalne incidencije na sloj jonizovanog gasa.) Tako se transmisija talasa na prvoj i drugoj razdvojnoj površi računa kao da nema višestruke refleksije. Direktno se dobija da je efektivna vrednost transmitovanog talasa

$$E_\mathrm{t} = E_\mathrm{i}|\underline{T}_{12}|\,\mathrm{e}^{-\alpha d}|\underline{T}_{23}|. \tag{17}$$



Slika 1. Kosa incidencija pod uglom većim od θ_{TOT}.

Koeficijente transmisije $\underline{T}_{12}$ i $\underline{T}_{23}$ računamo iz standardnih formula za Frenelove koeficijente (T_{n} ili T_{p}), gde vodimo računa da je $\cos\theta_{\mathrm{t}}$ imaginarno.

Na ovom principu se može ostvariti sprezanje dva optička vlakna, tako da se signal (talas) koji se prostire prvim vlaknom (koje u našem slučaju odgovara sredini 1) delimično presluša i u drugo vlakno (koje odgovara sredini 3).

3 Zadaci

1. Ravan, uniforman, prostoperiodičan EM talas učestanosti f nailazi iz vakuuma na homogen sloj jonizovanog gasa (u vakuumu) kritične učestanosti $f_{\mathrm{c}} = 2f$ i debljine d jednake talasnoj dužini incidentnog talasa u vakuumu. Odrediti efektivnu vrednost talasa transmitovanog kroz jonizovani gas, u odnosu na efektivnu vrednost incidentnog talasa (tj. efektivni koeficijent transmisije). Zanemariti "reflektovani" evanescentni "talas" na prvoj razdvojnoj površi.

Rešenje:

Prividna permitivnost jonizovanog gasa je $\varepsilon' = -3\varepsilon_0 < 0$, pa u njemu postoji evanescentni talas. Koeficijent slabljenja u gasu je $\alpha = \omega\sqrt{-\varepsilon'\mu_0} = \sqrt{3}\beta_0 = 2\pi\sqrt{3}/\lambda_0$. Talasna impedansa jonizovanog gasa je $\underline{Z}_2 = \mathrm{j}\sqrt{\frac{\mu_0}{-\varepsilon'}} = \mathrm{j}\frac{Z_0}{\sqrt{3}}$. Kompleksni koeficijenti transmisije na prvoj i drugoj razdvojnoj površi su $\underline{T}_{12} = \frac{\mathrm{j}2}{\sqrt{3}+\mathrm{j}}$ i $\underline{T}_{23} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{j}}$.

Efektivna vrednost transmitovanog talasa je

$$E_{\mathrm{t}} = E_i|\underline{T}_{12}|\,\mathrm{e}^{-\alpha d}|\underline{T}_{23}| = E_i\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{3}}, \tag{18}$$

što predstavlja slabljenje od oko 90 dB.

2. Ravan, uniforman, prostoperiodičan EM talas učestanosti f nailazi iz savršenog i nemagnetskog dielektrika indeksa prelamanja $n = 2$, pod upadnim uglom od $\theta = 45°$ na sloj vazduha debljine $d = 2\lambda_0$, gde je $\lambda_0 = \frac{c_0}{f}$. Incidentni talas je normalno polarizovan. Odrediti efektivnu vrednost talasa transmitovanog kroz vazdušni sloj, u odnosu na efektivnu vrednost incidentnog talasa (tj. efektivni koeficijent transmisije). Zanemariti "reflektovani" evanescentni "talas" na prvoj razdvojnoj površi.

Rešenje:

Ugao totalne refleksije za nailazak talasa na razdvojnu površ dielektrik-vazduh je $\theta_{\mathrm{TOT}} =$

$\arcsin\frac{c_1}{c_2} = \arcsin\frac{1}{n} = 30°$. Kako je upadni ugao veći od θ_{TOT}, to u sredini 2 (vazdušnom sloju) postoji evanescentni "talas". Za (kompleksni) ugao transmisije u drugoj sredini, θ_{t}, je $\sin\theta_{\mathrm{t}} = \frac{c_2}{c_1}\sin\theta = \sqrt{2}$, $\cos\theta_{\mathrm{t}} = -\mathrm{j}$. Koeficijent slabljenja je $\alpha = \beta_2 K = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$, pa talas u vazdušnom sloju oslabi za faktor $\mathrm{e}^{-\alpha d} = \mathrm{e}^{-4\pi}$. Ostaje da se još odrede koeficijenti transmisije na dve razdvojne površi. Iz izraza za Frenelov koeficijent T_{n} dobija se $\underline{T}_{12} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\mathrm{j}}$, $\underline{T}_{23} = \dfrac{-\mathrm{j}2}{-\mathrm{j}+\sqrt{2}}$.

Efektivna vrednost transmitovanog talasa je

$$E_{\mathrm{t}} = E_i|\underline{T}_{12}|\,\mathrm{e}^{-\alpha d}|\underline{T}_{23}| = E_i\frac{4}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-4\pi}, \tag{19}$$

što predstavlja slabljenje od oko 104 dB.

Lorencove transformacije za EM polje

- Drugi deo obaveznog dopunskog materijala iz Elektromagnetike za odsek OF -

11. jun 2006.

1 Pregled Lorencovih transformacija za EM polje

Na osnovu Ajnštajnovih postulata relativnosti,

1. Svi zakoni fizike su invarijantni u odnosu na inercijalne sisteme;

2. Brzina svetlosti je nezavisna od kretanja izvora svetlosti;

i eksperimentalne činjenice da je naelektrisanje (Q) invarijantno u odnosu na inercijalne sisteme, mogu se izvesti Lorencove transformacije za vektore elektromagnetskog polja $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$.

Neka su data dva sistema referencije, xyz i $x'y'z'$ i neke se "primovani" sistem kreće translatorno u odnosu na "neprimovani" sistem i u smeru x-ose konstantnom brzinom $\boldsymbol{v}$, kao na slici 2, tako da su se u početnom trenutku ($t = t' = 0$) koordinatni počeci O i O' poklapali. Označimo vektore polja u "neprimovanom " sistemu sa $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$, a u primovanom sa $\boldsymbol{E'}$ i $\boldsymbol{B'}$, njihove komponente paralelne brzini $\boldsymbol{v}$ indeksom $\|$, a komponente normalne brzini $\boldsymbol{v}$ indeksom $\perp$ i neka je sredina vakuum. Tada su vektori polja u "primovanom" sistemu dati formulama

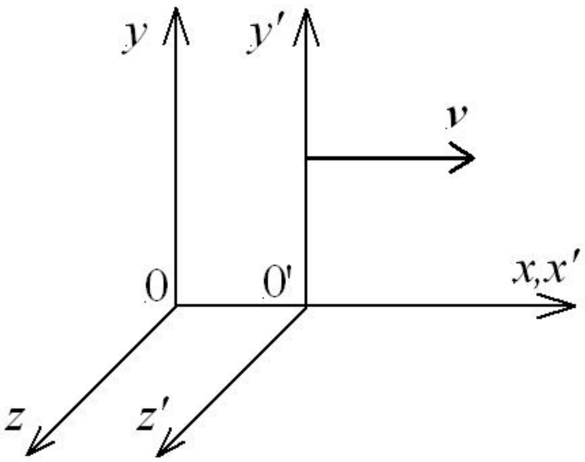
$$\boldsymbol{E}'_\perp = \gamma\left(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right), \quad \boldsymbol{E}'_\| = \boldsymbol{E}_\|, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{B}'_\perp = \gamma\left(\boldsymbol{B}_\perp - \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}}{c^2}\right), \quad \boldsymbol{B}'_\| = \boldsymbol{B}_\|, \tag{21}$$

gde je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{22}$$

a c brzina svetlosti u vakuumu. Prema tome, komponente polja u smeru kretanja su iste u oba sistema. Razlikuju se samo komponente polja upravne na smer kretanja.



Slika 2. Dva koordinatna sistema koji se međusobno kreću.

1.1 Dinamička elektromagnetska indukcija kao posledica Lorencovih transformacija polja

Neka u "neprimovanom" sistemu referencije postoji samo magnetsko polje $\boldsymbol{B}$, a električno polje neka je jednako nuli. Odredimo vektore polja u "primovanom" sistemu.

Rešenje:
Na osnovu druge jednačine (20) sledi $\boldsymbol{E}'_{\parallel} = 0$, pa je na osnovu prve jednačine (20)

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{23}$$

Za nerelativističke brzine ($v \ll c$) je $\gamma \approx 1$, pa se dobija

$$\boldsymbol{E}' \approx \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \tag{24}$$

što je identično izrazu za indukovano električno polje dinamičke indukcije. Dakle, izraz $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind\,DIN}} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, važi samo za *sporo pokretne* sredine (tj. $v \ll c$).

Zanimljivo je da izraz za indukovano polje dinamičke indukcije važi opšte (i za relativističke brzine), ako se umesto magnetskog polja u "neprimovanom" sistemu, $\boldsymbol{B}$, u izraz uvrsti polje u "primovanom" sistemu, $\boldsymbol{B}'$. Naime, iz jednačina (21), (23) i osobine da je vektorski proizvod dva paralelna vektora jednak nuli, sledi

$$\boldsymbol{E}' = \gamma \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \gamma \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_{\perp} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}'_{\perp} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}'. \tag{25}$$

V. Petrović, v.prof,
predmetni nastavnik

Napomena: Ovaj tekst može se preuzeti sa sajta Elektromagnetike.
`http://galeb.etf.bg.ac.yu/~em/obavestenja.html`.

Dva zadatka iz kose incidencije na jonosferu

- Treći deo obaveznog dopunskog materijala iz Elektromagnetike za odsek OF -

12. jun 2006.

1. Ravan, uniforman, prostoperiodičan TEM talas učestanosti f emituje se sa površi zemlje, pod uglom θ u odnosu na normalu i nailazi na jonosferu čija se prividna permitivnost, menja sa visinom, $\varepsilon' = \varepsilon'(h)$. Odrediti uslov pod kojim će doći do totalne refleksije talasa.

Rešenje: Jonosfera se može predstaviti kao niz tankih slojeva različitih prividnih permitivnosti. Iz generalisanog Snelovog zakona, $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta_\mathrm{t}} = \dfrac{c_0}{c} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}}$, kada se stavi $\theta_\mathrm{t} = \dfrac{\pi}{2}$, dobija se $\varepsilon'_\mathrm{max} = \varepsilon_0 \sin^2\theta$. Talas će se totalno reflektovati ako je bar na jednoj visini prividna permitivnost manja od $\varepsilon'_\mathrm{max}$.

2. Jonosfera se može predstaviti kao niz slojeva u atmosferi čija se kritična učestanost, f_c, menja sa visinom. Neka je poznato $f_\mathrm{c\,max}$. Odrediti pod kojim uglovima u odnosu na normalu se može emitovati ravan, uniforman, prostoperiodičan TEM talas, učestanosti $f = 2 f_\mathrm{c\,max}$, tako da prođe kroz jonosferu.

Rešenje: Prelomljeni ugao na proizvoljnoj visini od Zemlje dat je generalisanim Snelovim zakonom, $\sin\theta_\mathrm{t} = \sin\theta\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon'}}$. Uslov za prolazak kroz jonosferu je da je, na svim visinama, zadovoljeno $\sin\theta_\mathrm{t} < 1$, t.j., $\sin\theta < \sqrt{\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}} = \sqrt{1 - \dfrac{f_\mathrm{c}^2}{f^2}}$, odakle je $\theta < \arcsin\sqrt{1 - \dfrac{f_\mathrm{c\,max}^2}{f^2}} = 60^\circ$.

V.Petrović, v.prof,
predmetni nastavnik