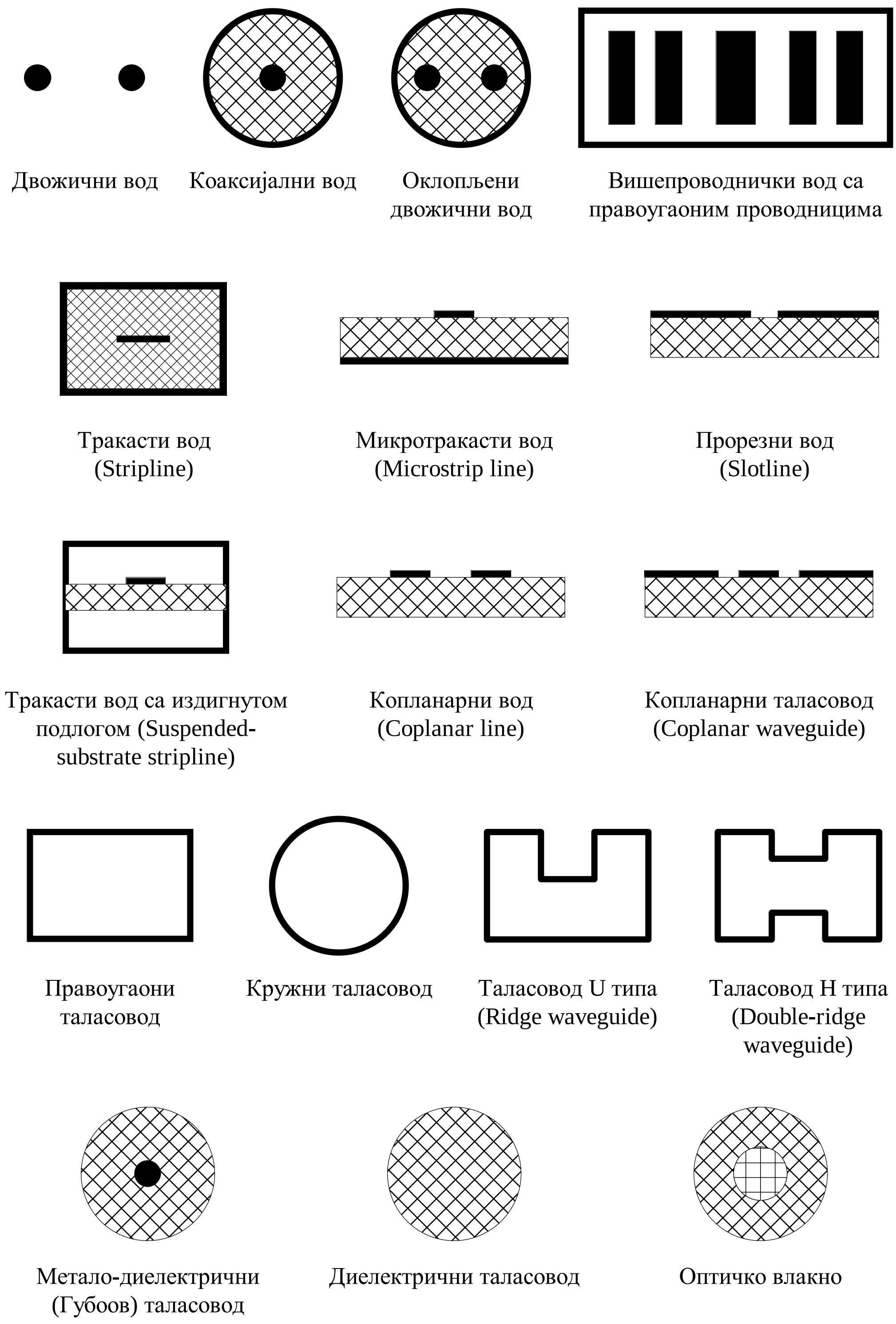
2. Опште особине вођених електромагнетских таласа

2.1. Увод

Везе између елемената микроталасних кола не могу се остварити жицама или штампаним колима произвољног облика, јер такви проводници уносе нежељене и тешко предвидљиве паразитне ефекте (капацитивности, индуктивности, губитке услед коначне проводности и услед зрачења), који доводе до губљења енергије сигнала, нежељених спрега, изобличења таласних облика итд. У циљу правилног функционисања кола, потребно је да везе између елемената имају дефинисане карактеристике и да остваре вођење електромагнетске енергије од једног до другог елемента уз минимизацију губитака и других неповољних ефеката.

С обзиром да су микроталасне учестаности врло високе, ефекти простирања (кашњења) су практично увек изражени. Стога се у анализи микроталасних кола мора узети у обзир и таласна природа електромагнетских поља.

Системи за вођење електромагнетских таласа имају задатак да усмере ток електромагнетске енергије дуж одређеног пута. Ови системи се деле на водове и таласоводе (видети слику 2.1). Водови су системи од два или више паралелних проводника. Таласоводи су металне цеви, диелектрични цилиндри или проводници пресвучени диелектриком, кроз које се могу простирати електромагнетски таласи. Водови и таласоводи треба да што мање зраче електромагнетску енергију и да имају што мање губитке (у проводницима и диелектрицима), тј. треба да што мање слабе талас. Осим тога, пожељно је да обезбеђују простирање само једне врсте таласа, како би се једноставно и поуздано остварила спрега између система за вођење таласа и генератора, односно пријемника.


Двожични вод
Коаксијални вод
Оклопљени двожични вод
Вишепроводнички вод са правоугаоним проводницима
Тракасти вод (Stripline)
Микротракасти вод (Microstrip line)
Прорезни вод (Slotline)
Тракасти вод са издигнутом подлогом (Suspended-substrate stripline)
Копланарни вод (Coplanar line)
Копланарни таласовод (Coplanar waveguide)
Правоугаони таласовод
Кружни таласовод
Таласовод U типа (Ridge waveguide)
Таласовод H типа (Double-ridge waveguide)
Метало-диелектрични (Губоов) таласовод
Диелектрични таласовод
Оптичко влакно

Слика 2.1. Попречни пресеци неких водова и таласовода.

Осим као системи за вођење енергије (односно за повезивање елемената микроталасних кола), секције водова и таласовода се користе и као елементи микроталасних кола. На пример, секција која је кратко спојена на једном крају, гледано са другог краја понаша се као реактанса, која се мења са учестаношћу и има низ резонантних и антирезонантних учестаности. Између осталог, таквим реактансама се могу остварити филтри. Секција вода или таласовода чија је дужина једнака четвртини таласне дужине може послужити као трансформатор импедансе итд.

У овој књизи посматраћемо само водове и таласоводе чији је попречни пресек исти дуж целог система (униформни системи). Биће изведене основне релације за електромагнетске таласе вођене водовима и таласоводима са линеарним хомогеним диелектрицима. Најпре ћемо сматрати да су диелектрик и проводници у систему савршени и решаваћемо Максвелове једначине за тај случај, па ћемо касније размотрити питање губитака у проводницима и диелектрицима. О униформним системима за вођење таласа који имају нехомоген диелектрик биће речи у поглављу 4. Од свих система приказаних на слици 2.1 теорија која ће бити изложена у овом поглављу важи за двожични вод, коаксијални вод, оклопљен двожични вод, оклопљен вишепроводнички вод, симетрични тракасти вод, правоугаони таласовод, кружни таласовод, таласовод U-типа и таласовод H-типа.

2.2. Системи за вођење без губитака

Претпоставимо, најпре, да је диелектрик система за вођење таласа идеалан, пермитивности ε и пермеабилности μ, и да су проводници савршени (бесконачно велике специфичне проводности). Максвелове једначине у комплексном облику за електромагнетско поље у диелектрику оваквог система гласе:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\mathbf{H}\,, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\mathbf{E}\,, \tag{2.2}$$

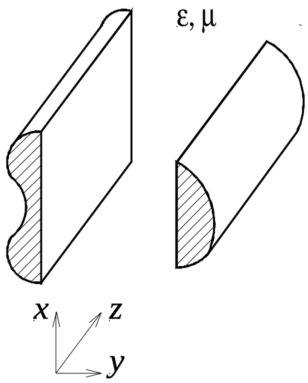
$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0\,, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0\,, \tag{2.4}$$

где је $\mathbf{E}$ вектор јачине електричног поља, $\mathbf{H}$ вектор јачине магнетског поља, а ω угаона учестаност. Све векторске величине у овим једначинама су комплексне, али то нећемо посебно означавати.

Уочимо да једначине (2.3) и (2.4) следе из једначина (2.2), односно (2.1), ако се узме дивергенција леве и десне стране роторских једначина.

Анализа система за вођење електромагнетских таласа, тј. одређивање електричног и магнетског поља, а одатле и коефицијената простирања, заснива се на решавању једначина (2.1)–(2.4) за систем цилиндричне геометрије (јер се облик попречног пресека вода или таласовода не мења дуж система). Поставимо z-осу координатног система дуж изводнице вода или таласовода (тј. нормално на попречни пресек, приказан на слици 2.1), као што је скицирано на слици 2.2. Тада Декартове координате x и y одређују положај тачке у трансверзалној равни (попречном пресеку) система. Ако се посматра цилиндрични координатни систем, онда положај у попречном пресеку одређују цилиндричне координате ρ и ϕ.



Слика 2.2. Координатни систем за анализу простирања таласа дуж униформног система за вођење.

Изведимо, најпре, таласне (Хелмхолцове) једначине. Ако потражимо ротор једначине (2.1), користећи се једначином (2.2) добијамо:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E}\,. \tag{2.5}$$

На основу идентитета

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}\,, \tag{2.6}$$

где је $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ Лапласов оператор, и једначине (2.4) коначно добијамо

$$\Delta\mathbf{E} = -k^2\mathbf{E}\,, \tag{2.7}$$

где је

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,. \tag{2.8}$$

Једначина (2.7) се назива таласном једначином за електрично поље. На сличан начин се изводи и таласна једначина за магнетско поље,

$$\Delta\mathbf{H} = -k^2\mathbf{H}\,. \tag{2.9}$$

Иако су на први поглед независне, једначине (2.7) и (2.9) се не могу решавати одвојено, јер су вектори **E** и **H** повезани једначинама (2.1) и (2.2).

Максвелове једначине (2.1)–(2.4) је неопходно допунити граничним условима за површи савршених проводника у систему (видети слику 2.3):

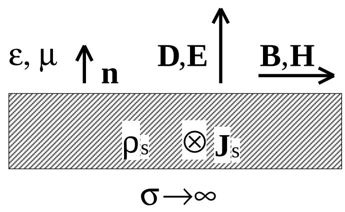
$$\mathbf{n}\times\mathbf{E} = 0\,, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_s\,, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}\,, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{H} = 0\,, \tag{2.13}$$

где је **n** нормала на површ проводника усмерена од проводника ка диелектрику, $\mathbf{J}_S$ вектор густине површинских струја проводника, а ρ_S густина површинског наелектрисања проводника. Од ових граничних услова за анализу простирања вођених таласа најважнији је услов (2.10).



Слика 2.3. Уз граничне услове на површи савршеног проводника.

Ротор и дивергенција се могу симболички представити као векторско, односно скаларно множење набла оператором (∇). Овај оператор се може раставити на две компоненте: једну у правцу простирања таласа (дакле, дуж z-осе) и другу, трансверзалну (која је нормална на z-осу), тј.

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{i}_z \,. \tag{2.14}$$

(У Декартовом систему је $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{i}_z$, т.ј. $\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{i}_y$.)

Претпоставимо, даље, да посматрамо само талас који се простире у смеру +z-осе. (У систему за вођење у општем случају постоји и талас који се простире у смеру –z-осе.) Онда се зависност електричног и магнетског поља од z-координате може представити мултипликативним фактором $\exp(-\gamma z)$, где је $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta$ коефицијент простирања. Тако је, на пример, у Декартовом координатном систему $\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}(x,y,0)\exp(-\gamma z)$ и $\mathbf{H}(x,y,z) = \mathbf{H}(x,y,0)\exp(-\gamma z)$. Јединица за γ је 1/m. Реални део коефицијента простирања, α, назива се коефицијентом слабљења (његова јединица је Np/m), а имагинарни део, β, назива се фазним коефицијентом (његова јединица је rad/m).

Парцијални извод по z се сада своди на множење коефицијентом γ, па набла оператор добија облик

$$\nabla = \nabla_t - \gamma\mathbf{i}_z \,. \tag{2.15}$$

На сличан начин можемо раставити и векторе **E** и **H** на лонгитудиналне и трансверзалне компоненте,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_z\mathbf{i}_z \,,\ \ \mathbf{H} = \mathbf{H}_t + H_z\mathbf{i}_z \,. \tag{2.16}$$

Из једначине (2.1) сада се добија

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathbf{E} &= \nabla\times\mathbf{E} = (\nabla_t - \gamma\mathbf{i}_z)\times(\mathbf{E}_t + E_z\mathbf{i}_z) = \nabla_t\times\mathbf{E}_t + \nabla_t\times(E_z\mathbf{i}_z) - \gamma\mathbf{i}_z\times\mathbf{E}_t - \gamma\mathbf{i}_z\times(E_z\mathbf{i}_z)\\ &= -\mathrm{j}\omega\mu(\mathbf{H}_t + H_z\mathbf{i}_z)\,.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Како су вектори $\mathbf{i}_z$ и $E_z\mathbf{i}_z$ паралелни, њихов векторски производ је једнак нули, па се изједначавањем трансверзалних и лонгитудиналних компоненти у једначини (2.17) добија

$$\nabla_t \times (E_z \mathbf{i}_z) - \gamma \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t = -\mathrm{j}\omega\mu \mathbf{H}_t \,, \tag{2.18}$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = -\mathrm{j}\omega\mu H_z \mathbf{i}_z \,. \tag{2.19}$$

Сличним растављањем остале три Максвелове једначине дају

$$\nabla_t \times (H_z \mathbf{i}_z) - \gamma \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_t = \mathrm{j}\omega\varepsilon \mathbf{E}_t \,, \tag{2.20}$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = \mathrm{j}\omega\varepsilon E_z \mathbf{i}_z \,, \tag{2.21}$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t - \gamma E_z = 0 \,, \tag{2.22}$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{H}_t - \gamma H_z = 0 \,. \tag{2.23}$$

Ако преуредимо једначине (2.18) и (2.20), добијамо

$$\gamma \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t - \mathrm{j}\omega\mu \mathbf{H}_t = \nabla_t \times (E_z \mathbf{i}_z) \,, \tag{2.24}$$

$$\mathrm{j}\omega\varepsilon \mathbf{E}_t + \gamma \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_t = \nabla_t \times (H_z \mathbf{i}_z) \,. \tag{2.25}$$

Уочимо да је $\nabla_t \times (E_z \mathbf{i}_z) = (\nabla_t E_z) \times \mathbf{i}_z = -\mathbf{i}_z \times \nabla_t E_z$ и, слично, $\nabla_t \times (H_z \mathbf{i}_z) = -\mathbf{i}_z \times \nabla_t H_z$. Помножимо једначину (2.24) векторски, са леве стране, са $\mathbf{i}_z$. Користећи се идентитетом $\mathbf{i}_z \times (\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t) = \mathbf{i}_z (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{E}_t) - \mathbf{E}_t (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_z) = -\mathbf{E}_t$, добијамо

$$-\gamma \mathbf{E}_t - \mathrm{j}\omega\mu \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_t = \nabla_t E_z \,. \tag{2.26}$$

Множећи ову једначину са $\gamma/(\mathrm{j}\omega\mu)$ и сабирајући са једначином (2.25) добијамо

$$(\gamma^2 + k^2)\mathbf{E}_t = -\gamma \nabla_t E_z + \mathrm{j}\omega\mu \mathbf{i}_z \times \nabla_t H_z \,. \tag{2.27}$$

На сличан начин се може из једначина (2.24) и (2.25) елиминисати и $\mathbf{E}_t$, одакле се добија

$$(\gamma^2 + k^2)\mathbf{H}_t = -\gamma \nabla_t H_z + \mathrm{j}\omega\varepsilon \mathbf{i}_z \times \nabla_t E_z \,. \tag{2.28}$$

Ако се у таласне једначине уврсте једначине (2.16) и $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta_t + \gamma^2$, где је $\Delta_t = \nabla_t \cdot \nabla_t$ трансверзални лапласијан, добија се, између осталог,

$$\Delta_t E_z + (\gamma^2 + k^2) E_z = 0 \,, \tag{2.29}$$

$$\Delta_t H_z + (\gamma^2 + k^2) H_z = 0 \,. \tag{2.30}$$

Једначине (2.19), (2.21) и (2.27)–(2.30) представљају основ за анализу простирања вођених електромагнетских таласа.

У униформним системима за вођење таласа могу, у принципу, постојати две класе таласа, у зависности од тога да ли је $\gamma^2 + k^2 = 0$ или је $\gamma^2 + k^2 \neq 0$. Видећемо да се у првом случају ради о ТЕМ таласу, а у другом о ТЕ, ТМ и хибридним таласима.

2.2.1. ТЕМ таласи

Посматрајмо прво случај $E_z = 0$ и $H_z = 0$. Из једначина (2.27) и (2.28) следи да тада мора бити $\gamma^2 + k^2 = 0$, односно $\gamma = \sqrt{-\omega^2 \varepsilon\mu} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, како би постојала нетривијална решења за $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Овакав талас нема компоненте поља у правцу простирања, већ само трансверзалне компоненте електричног и магнетског поља, па се назива трансверзалним електромагнетским таласом (ТЕМ талас). Коефицијент простирања ТЕМ таласа је исти као за униформан, раван талас који се простире у хомогеној средини параметара ε и μ (тј. средини истих особина као што је она која испуњава посматрани систем за вођење). Из једначина (2.24) и (2.25) следи

$$-\gamma \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_t = \mathrm{j}\omega\varepsilon \mathbf{E}_t \,, \tag{2.31}$$

$$\gamma \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t = \mathrm{j}\omega\mu \mathbf{H}_t \,, \tag{2.32}$$

што су, у ствари, две идентичне релације јер је $\gamma/\mathrm{j}\omega\varepsilon = \mathrm{j}\omega\mu/\gamma = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Једначине (2.31) и (2.32) показују да су вектори $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_t$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_t$) међусобно нормални, а да између њихових интензитета постоји однос који зависи само од особина диелектрика. Тај однос,

$$Z_{\mathrm{TEM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \,, \tag{2.33}$$

назива се таласном импедансом ТЕМ типа таласа. (Напоменимо да је ова таласна импеданса иста као за слободан, униформан, раван електромагнетски талас који се простире у средини параметара ε и μ.) У Декартовим координатама, из (2.31) и (2.32) следи:

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = Z_{\mathrm{TEM}} \,. \tag{2.34}$$

Расподела електричног поља по попречном пресеку система је сада одређена једначинама

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0 \,, \tag{2.35}$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = 0 \,, \tag{2.36}$$

које су формално идентичне једначинама у електростатици за дводимензиони систем (код кога је $\partial/\partial z = 0$, а електрично поље има само трансверзалне компоненте). Уз то, и гранични услови за површи проводника су исти као у електростатици (тј. тангенцијална компонента електричног поља је једнака нули), па се расподела поља по попречном пресеку поклапа са одговарајућом електростатичком расподелом. Међутим, код система за вођење електрично поље се мења дуж z-осе због фактора $\exp(-\gamma z)$, а мења се и у времену (простопериодична функција), док је у електростатичком случају поље независно од z и од времена.

Да би енергија у дводимензионом електростатичком систему била коначна, систем се мора састојати од бар два проводника, јер збир густина подужних наелектрисања (Q') свих проводника мора бити једнак нули, тј.

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i' = 0 \,, \tag{2.37}$$

где је N број проводника. Стога и систем за вођење ТЕМ таласа мора имати бар два проводника, односно то мора бити вод. На основу граничних услова (2.11) и (2.12), као и једначине (2.31) или (2.32) следи да код водова са ТЕМ таласом постоји следећа веза између густине површинског наелектрисања и густине површинске струје на површи проводника:

$$\rho_s = \sqrt{\varepsilon\mu} J_{sz} \tag{2.38}$$

(вектор $\mathbf{J}_s$ има само z-компоненту), одакле следи услов да је алгебарски збир струја у свим проводницима вода једнак нули,

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0 . \tag{2.39}$$

У случају вода са два проводника, једначина (2.39) показује да су струје проводника истих интензитета, али супротних смерова.

Од Максвелових једначина (2.18)–(2.23) остале су неискоришћене још једначине (2.21) и (2.23), које гласе $\nabla_t \times \mathbf{H}_t = 0$ и $\nabla_t \cdot \mathbf{H}_t = 0$. Међутим, ове једначине не дају ништа ново, јер су аутоматски задовољене због везе (2.32) и једначина (2.35) и (2.36).

2.2.2. ТЕ, ТМ и хибридни таласи

Ако је $E_z = 0$ и $H_z \neq 0$, имамо трансверзалне електричне таласе (ТЕ таласе), који се називају и Н таласима. Ако је $E_z \neq 0$ и $H_z = 0$, имамо трансверзалне магнетске таласе (ТМ таласе), који се називају и Е таласима. Коначно, ако је $E_z \neq 0$ и $H_z \neq 0$, имамо хибридне таласе, који се називају још и ЕН или НЕ таласима, а простиру се дуж система за вођење са нехомогеним диелектриком. За све пobројане типове таласа је $\gamma^2 + k^2 \neq 0$. Напоменимо да се ТЕ, ТМ и хибридни таласи могу простирати како дуж водова, тако и дуж таласовода. Овде ћемо разматрати само ТЕ и ТМ таласе који се простиру дуж система за вођење са хомогеним диелектриком.

Уведимо ознаку $K^2 = \gamma^2 + k^2$. Тада, на основу једначина (2.27) и (2.28), за ТЕ таласе имамо

$$\mathbf{E}_t = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{K^2} \mathbf{i}_z \times \nabla_t H_z , \tag{2.40}$$

$$\mathbf{H}_t = -\frac{\gamma}{K^2} \nabla_t H_z . \tag{2.41}$$

Из једначина (2.40) и (2.41) следи да су трансверзалне компоненте електричног и магнетског поља (E_t и H_t) потпуно одређене ако познајемо лонгитудиналну компоненту магнетског поља (H_z). Ова компонента је, иначе, решење таласне једначине (2.30), која се може написати у облику

$$\Delta_t H_z + K^2 H_z = 0 , \tag{2.42}$$

и одговарајућих граничних услова на површи проводника у систему. Математичком анализом се може показати да таласна једначина са граничним условима има решења само за дискретне вредности коефицијента K^2 (које зависе од облика система за вођење таласа). Ове вредности се називају својственим (сопственим) вредностима система за вођење, а таласна једначина представља карактеристичну једначину, односно једначину својствених вредности. С обзиром на раније учињене претпоставке да се све величине које описују поље мењају дуж z-осе као $\exp(-\gamma z)$, у Декартовим координатама можемо писати

$$H_z(x,y,z) = H_z(x,y,0)\exp(-\gamma z)\,. \tag{2.43}$$

Величина $H_z(x,y,0)$ зависи само од трансверзалних координата (које могу бити Декартове x и y координате, цилиндричне координате ρ и ϕ, и слично). Стога се као решења таласне једначине са граничним условима добијају функција $H_z(x,y,0)$ и коефицијент K^2. Коефицијент простирања γ је сада одређен, јер је познато K^2, а k је одређено радном учестаношћу и параметрима диелектрика.

Из једначина (2.40) и (2.41) следи да је

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma}\mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_t\,, \tag{2.44}$$

односно

$$\mathbf{H}_t = \frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\mu}\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t\,. \tag{2.45}$$

То значи да су вектори E_t и H_t међусобно управни, а количник њихових интензитета је исти у свим тачкама система за вођење. Тај количник,

$$Z_{\mathrm{TE}} = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma}\,, \tag{2.46}$$

назива се таласном импедансом ТЕ таласа.

Слично се за ТМ таласе добија

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\gamma}{K^2}\nabla_t E_z\,, \tag{2.47}$$

$$\mathbf{H}_t = -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{K^2}\mathbf{i}_z \times \nabla_t E_z\,, \tag{2.48}$$

уз

$$\Delta_t E_z + K^2 E_z = 0\,, \tag{2.49}$$

где је E_z облика

$$E_z(x,y,z) = E_z(x,y,0)\exp(-\gamma z)\,. \tag{2.50}$$

Код ТМ таласа се као решење таласне једначине и граничних услова добија функција $E_z(x,y,0)$ и коефицијент K^2.

Из једначина (2.47) и (2.48) следи

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_t\,, \tag{2.51}$$

односно

$$\mathbf{H}_t = \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{\gamma}\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t\,, \tag{2.52}$$

па је таласна импеданса ТМ таласа

$$Z_{\mathrm{TM}} = \frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} . \tag{2.53}$$

За ТЕ и ТМ таласе имамо

$$\gamma = \sqrt{K^2 - k^2} = \mathrm{j}\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - K^2} . \tag{2.54}$$

Подсетимо се да K^2 зависи само од облика система за вођење и типа таласа, јер се у таласним једначинама (2.42) и (2.49) не јавља учестаност. Може се показати да је за затворене таласоводе K^2 увек чисто реалан број. Из (2.54) тако следи да је β чисто реално ако је $\omega^2\varepsilon\mu - K^2 > 0$, а чисто имагинарно ако је $\omega^2\varepsilon\mu - K^2 < 0$. Учестаност при којој је $\omega^2\varepsilon\mu - K^2 = 0$,

$$f_{\mathrm{c}} = \frac{K}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} , \tag{2.55}$$

назива се критичном учестаности за посматрани тип таласа. Ако је учестаност нижа од критичне, γ је чисто реално, а промена поља дуж *z*-осе је одређена фактором $\exp(-\gamma z) = \exp(-\alpha z)$, што значи да талас експоненцијално слаби, не мењајући фазу. Другим речима, талас се не простире. Ако је учестаност виша од критичне, γ је чисто имагинарно, па је $\exp(-\gamma z) = \exp(-\mathrm{j}\beta z)$, што значи да се талас заиста простире. Талас при томе дуж *z*-осе не мења интензитет, али му се фаза мења (опада у смеру простирања таласа).

2.3. Таласна дужина, фазна и групна брзина

Таласна дужина је растојање између два најближа трансверзална пресека система за вођење у којима је талас у фази. Таласну дужину ћемо означити са λ_{g}, где индекс “g” (од “guided wave”) указује на то да је таласна дужина везана за посматрани систем за вођење таласа. Између таласне дужине и фазног коефицијента постоји веза $\lambda_{\mathrm{g}} = 2\pi/\beta$.

Замислимо да се посматрач креће у смеру *z*-осе тако да талас увек види у истој фази. За њега мора бити $\omega t - \beta z = \mathrm{const}$. Брзина којом се креће тај посматрач,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} = c_{\phi} , \tag{2.56}$$

назива се брзином простирања фазе таласа (фазном брзином). За ТЕМ таласе је $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, па c_{ϕ} не зависи од учестаности (ако се занемаре губици и промене параметара ε и μ са учестаношћу), тј. $c_{\phi} = 1\big/\sqrt{\varepsilon\mu} = c_0\big/\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}$, где је $c_0 = 2{,}99792458\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ брзина простирања у вакууму. Одавде је $\lambda = c_0\big/\left(f\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}\right) = \lambda_0\big/\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}} < \lambda_0$, где је $\lambda_0 = c_0/f$. За ТЕ и ТМ таласе је, при $f > f_{\mathrm{c}}$,

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - K^2} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1-\left(\frac{f_\mathrm{c}}{f}\right)^2}\ , \tag{2.57}$$

па је

$$c_\phi = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{1-\left(\frac{f_\mathrm{c}}{f}\right)^2}} \tag{2.58}$$

и

$$\lambda_\mathrm{g} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{1-\left(\frac{f_\mathrm{c}}{f}\right)^2}}\ . \tag{2.59}$$

Код ТЕ и ТМ таласа c_ϕ може бити и мање, и веће од c_0, а λ_g и веће, и мање од λ_0. На пример, ако је $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$ и $\mu_\mathrm{r} = 1$, λ_g је веће од λ_0. То је могуће зато што је фазна брзина математички уведена величина, а не брзина којом се преноси енергија или информација.

Групна брзина је још једна математички уведена величина. Она представља брзину простирања фазе синусоидалне модулације синусоидалног носиоца. Израз за групну брзину ћемо извести на примеру амплитудски модулисаног сигнала са два бочна опсега.

Нека је преношени сигнал у пресеку $z = 0$ дат изразом

$$a(t,0) = A_\mathrm{m}\cos\omega t\cos\Omega t = \frac{1}{2}A_\mathrm{m}\left(\cos(\omega+\Omega)t + \cos(\omega-\Omega)t\right), \tag{2.60}$$

где је Ω учестаност модулишућег сигнала, а ω учестаност носиоца ($\Omega \ll \omega$). У пресеку одређеним координатом z је

$$a(t,z) = \frac{1}{2}A_\mathrm{m}\{\cos[(\omega+\Omega)t - \beta(\omega+\Omega)z] + \cos[(\omega-\Omega)t - \beta(\omega-\Omega)z]\}, \tag{2.61}$$

Пошто је $\Omega \ll \omega$, промена β када се угаона учестаност мења од $\omega-\Omega$ до $\omega+\Omega$ се може апроксимирати линеарном функцијом, тј.

$$\beta(\omega+\Delta\omega) = \beta(\omega) + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\Delta\omega, \tag{2.62}$$

па је

$$a(t,z) = A_\mathrm{m}\left(\cos(\Omega t - z\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega})\cos(\omega t - \beta_\omega z)\right). \tag{2.63}$$

Види се да модулишући сигнал у пресеку z фазно касни за $z\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}$ у односу на сигнал информације у пресеку $z = 0$, па је групна брзина

$$c_\mathrm{g} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}}\ . \tag{2.64}$$

За TEM таласе је $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega = \sqrt{\varepsilon\mu} = \beta/\omega$, тј.

$$c_{\mathrm{g}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}} = c_{\phi}\,, \tag{2.65}$$

и не зависи од учестаности (уколико се параметри средине не мењају са учестаношћу). Код TE и TM таласа је

$$c_{\mathrm{g}} = c\sqrt{1-\left(\frac{f_{\mathrm{c}}}{f}\right)^2}\,, \tag{2.66}$$

док је c_{ϕ} дато једначином (2.58). Стога је

$$c_{\phi}c_{\mathrm{g}} = \frac{c_0^2}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}\,. \tag{2.67}$$

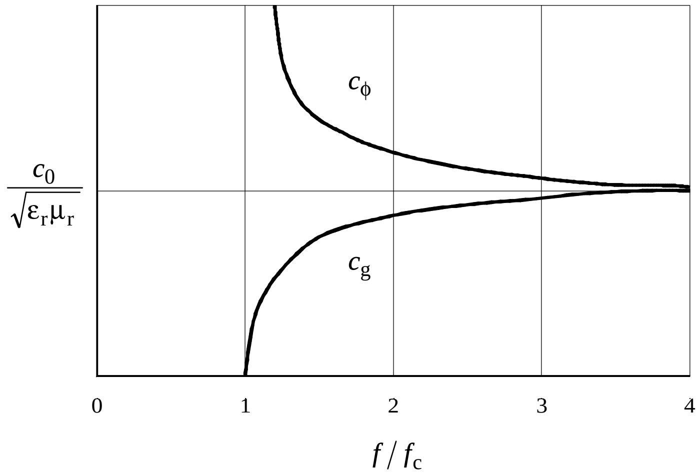
Појава да групна брзина зависи од учестаности назива се дисперзијом. Због дисперзије се таласни облик преношеног сигнала изобличује, што често ограничава капацитет канала за пренос информација. На пример, код дигиталног преноса долази до преклапања симбола, што може онемогућити детекцију. На слици 2.4 скицирана је зависност фазне и групне брзине од учестаности код TE и TM таласа.

Напоменимо да немодулисани сигнал (чиста синусоида), као ни модулишући синусоидални сигнал, не носе собом информацију. Због тога, ни фазна, ни групна брзина нису, у општем случају, једнаке брзини преноса енергије, односно брзини преноса информација посредством модулисаног носиоца.

За TE и TM таласе се дефинише критична таласна дужина,

$$\lambda_{\mathrm{c}} = \frac{1}{f_{\mathrm{c}}\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c_0}{f_{\mathrm{c}}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}}\,. \tag{2.68}$$

Критична таласна дужина је таласна дужина TEM таласа при критичној учестаности посматраног TE или TM таласа, у диелектрику који има исте особине као онај у коме се простире посматрани TE или TM талас. На основу једначина (2.59) и (2.68) може се доказати да важи



Слика 2.4. Зависност фазне (c_ϕ) и групне брзине (c_g) од нормализоване учестаности (f/f_c).

$$\frac{\varepsilon_r \mu_r}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} . \tag{2.69}$$

Таласне импедансе TE и TM таласа могу се написати у облику:

$$Z_{TE} = \frac{Z_{TEM}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} , \tag{2.70}$$

$$Z_{TE} = Z_{TEM} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} . \tag{2.71}$$

Ако је $f < f_c$, онда је за TE и TM таласе

$$\gamma = \alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1} . \tag{2.72}$$

Ако је $f << f_c$, онда је

$$\alpha \approx \omega_c \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda_c} . \tag{2.73}$$

и не зависи од учестаности. На овој чињеници се заснива рад неких ослабљивача (атенуатора).