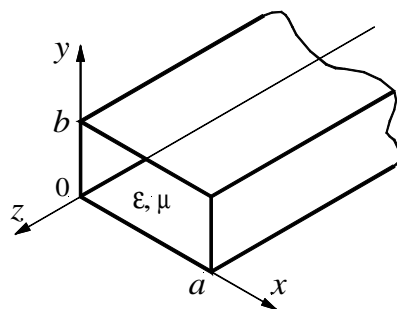


5. Правоугаони таласовод

5.1. Увод

У овом поглављу ћемо анализирати простирање електромагнетских таласа дуж металног таласовода правоугаоног попречног пресека, скицираног на слици 5.1. Странице правоугаоника су a и b ($a > b$). Сматраћемо, најпре, да је проводник таласовода савршен и да је диелектрик хомоген и, такође, без губитака. Као што је показано у другом поглављу, у оваквом таласоводу се могу протирати ТЕ и ТМ таласи. Детаљи извођења структуре поља ових таласа приказани су у следећем одељку. У трећем одељку разматрају се изрази за снагу која се преноси таласоводом, као и изрази за коефицијент слабљења, а у четвртом одељку приказане су неке таласоводне компоненте (прилагођења, ослабљивачи, рачве, усмерени спрежњаци итд.) и дисконтинуитети.



Слика 5.1. Правоугаони таласовод.

5.2. ТЕ и ТМ таласи у правоугаоном таласоводу

5.2.1. ТЕ таласи

Сматраћемо да је таласовод приказан на слици 5.1 без губитака. Основне једначине за ТЕ и ТМ таласе у оваквом систему изведене су у одељку 2.2.2. У том одељку је показано да се код ТЕ таласа трансверзалне компоненте електричног и магнетског поља могу изразити преко z -компоненте магнетског поља, према једначинама (2.40) и (2.41). У нашем случају, трансверзалне компоненте су x -компоненте и y -компоненте, тј.

$$\mathbf{E}_t = E_x \mathbf{i}_x + E_y \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{H}_t = H_x \mathbf{i}_x + H_y \mathbf{i}_y. \quad (5.1)$$

Развијањем трансверзалног набла оператора у Декартовим координатама, из једначина (2.40) и (2.41) се добија:

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{K^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{j\omega\mu}{K^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (5.2)$$

$$H_x = -\frac{\gamma}{K^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\gamma}{K^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (5.3)$$

где је $\gamma = j\beta$. Према једначини (2.43), скаларна функција H_z зависи од Декартових координата као

$$H_z(x, y, z) = H_z(x, y, 0) \exp(-\gamma z), \quad (5.4)$$

и задовољава таласну једначину (2.42), која у Декартовим координатама гласи

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + K^2 H_z = 0. \quad (5.5)$$

Електрично поље мора задовољавати граничне услове на површи проводника таласовода, тј.

$$E_{\tan} = 0. \quad (5.6)$$

На левом зиду таласовода ($x = 0$) и на десном зиду ($x = a$) тангенцијална компонента је y -компонента, односно мора бити

$$E_y(0, y, z) = E_y(a, y, z) = 0. \quad (5.7)$$

На доњем зиду ($y = 0$) и на горњем зиду ($y = b$) тангенцијална компонента је x -компонента, односно

$$E_x(x, 0, z) = E_x(x, b, z) = 0. \quad (5.8)$$

На основу једначина (5.2), (5.7) и (5.8) добијају се гранични услови за H_z (прецизније, за први извод H_z по координати нормалној на зид таласовода), који се могу изразити у општем облику као

$$\frac{dH_z}{dn} = 0, \quad (5.9)$$

где d/dn означава извод у правцу нормале на зид таласовода, односно, преко Декартових координата,

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \text{ за } x=0 \text{ и } x=a, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ за } y=0 \text{ и } y=b. \quad (5.10)$$

Анализа поља ТЕ таласа у правоугаоном таласоводу сада се своди на решавање таласне једначине (5.5) заједно са граничним условима (5.10). Када се из ових једначина одреди H_z , остале компоненте поља се могу израчунати из једначина (5.2) и (5.3).

Таласну једначину (5.5) ћемо решити методом раздвајања променљивих. За успешну примену овог метода пожељно је да се површи дисконтинуитета (зидови таласовода у нашем случају) поклапају са координатним површима (са координатним равнима Декартовог система у нашем случају). По методу раздвајања променљивих, непозната функција се представи у облику производа (непознатих) функција које зависе само од једне координате. У нашем случају,

$$H_z(x, y, 0) = X(x)Y(y), \quad (5.11)$$

где $X(x)$ зависи само од x -координате, а $Y(y)$ само од y -координате. Заменом једначине (5.11) у једначину (5.4), и заменом једначине (5.4) у (5.5), добијамо, после скраћивања фактора $\exp(-\gamma z)$,

$$\frac{\partial^2(XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(XY)}{\partial y^2} + K^2 XY = 0. \quad (5.12)$$

С обзиром да је $\partial Y/\partial x = 0$ и $\partial X/\partial y = 0$, одавде следи

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + K^2 XY = 0, \quad (5.13)$$

где су парцијални изводи замењени обичним. Делењем ове једначине производом XY ($XY \neq 0$), добија се

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + K^2 = 0. \quad (5.14)$$

Подсетимо се да је коефицијент K дефинисан изразом

$$K^2 = \gamma^2 + k^2, \quad (5.15)$$

где је коефицијент простирања ($\gamma = j\beta$) јединствен за цео талас, а $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ исто у свим тачкама диелектрика таласовода, јер је диелектрик хомоген. Дакле, K је независно од x и y . У изразу (5.14) X зависи само од x , па $d^2 X/dx^2$ може зависити само од x , тако да и

$$f(x) = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (5.16)$$

може зависити само од x . Сличним резонувањем се закључује да члан

$$g(y) = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (5.17)$$

може зависити само од y . Сада се једначина (5.14) своди на збир облика

$$f(x) + g(y) + \text{const} = 0. \quad (5.18)$$

Очигледно, $g(y) + \text{const}$ не зависи од x , па $f(x)$ мора бити једнако константи. Означимо ту константу са $-k_x^2$ (због каснијих погодности), па имамо

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2. \quad (5.19)$$

Слично томе, $g(y)$ мора бити константа, коју ћемо означити са $-k_y^2$, односно имамо

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2. \quad (5.20)$$

Из једначина (5.18), (5.19) и (5.20) следи да k_x и k_y морају задовољавати једначину

$$k_x^2 + k_y^2 = K^2. \quad (5.21)$$

Једначине (5.19) и (5.20) су обичне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима. Њихова општа решења су

$$X(x) = C_1 \sin(k_x x) + C_2 \cos(k_x x), \quad (5.22)$$

$$Y(y) = C_3 \sin(k_y y) + C_4 \cos(k_y y), \quad (5.23)$$

па је опште решење таласне једначине (5.5) дато са

$$H_z(x, y, z) = (C_1 \sin(k_x x) + C_2 \cos(k_x x))(C_3 \sin(k_y y) + C_4 \cos(k_y y)) \exp(-\gamma z). \quad (5.24)$$

Према граничним условима (5.10), мора бити $C_1 = 0$ (да би био задовољен услов за $x = 0$), $\sin k_x a = 0$ (да би био задовољен услов за $x = a$), $C_3 = 0$ (да би био задовољен услов за $y = 0$) и $\sin k_y b = 0$ (да би био задовољен услов за $y = b$). Из овога следе услови

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

Уведимо ознаку $C_2 C_4 = H_0$, где је H_0 комплексна константа. Сада је

$$H_z(x, y, z) = H_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-j\beta z). \quad (5.26)$$

На основу једначина (5.2) и (5.3) добијају се изрази за трансверзалне компоненте електричног и магнетског поља,

$$E_x(x, y, z) = \frac{j\omega\mu}{K^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(-j\beta z), \quad (2.27)$$

$$E_y(x, y, z) = -\frac{j\omega\mu}{K^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-j\beta z), \quad (5.28)$$

$$H_x(x, y, z) = \frac{j\beta}{K^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-j\beta z), \quad (5.29)$$

$$H_y(x, y, z) = \frac{j\beta}{K^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(-j\beta z), \quad (5.30)$$

где је

$$K^2 = \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2, \quad (5.31)$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \left(\frac{m}{a}\right)^2 - \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (5.32)$$

Из горњих једначина је очигледно да не може истовремено бити $m=0$ и $n=0$. У противном, не постоји електрично поље ($E_x=0$ и $E_y=0$), па стога не постоји ни талас.

За различите вредности m и n добијају се различите структуре поља, односно различити типови таласа (модови), који носе ознаку TE_{mn} . На слици 5.2 приказана је структура електричног и магнетског поља неколико ТЕ типова таласа.

На основу једначине (2.55) се за критичну учестаност TE_{mn} типа таласа добија

$$f_{cTE_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (5.33)$$

На основу једначина (5.33) и (2.70) може се израчунати таласна импеданса TE_{mn} типа таласа.

Ако је $a > b$, онда најнижу критичну учестаност има TE_{10} тип таласа, који се назива доминантним типом таласа. (Видећемо да сви ТМ типови таласа имају критичну учестаност вишу од TE_{10} типа таласа.) Критична учестаност доминантног типа таласа је

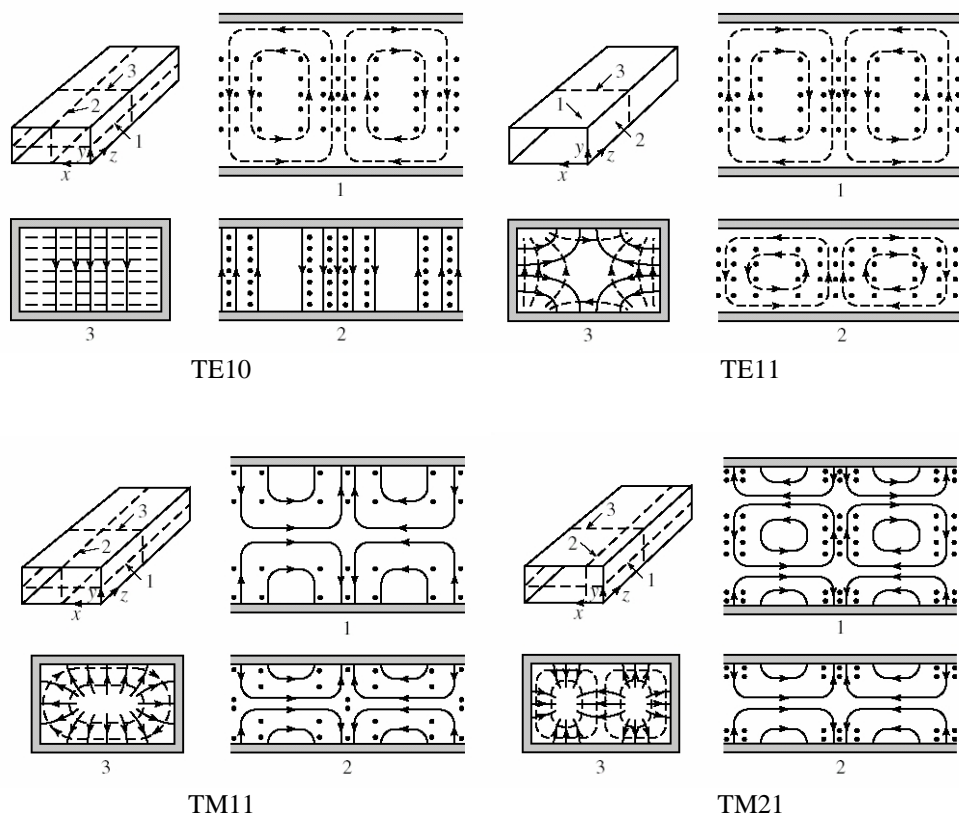
$$f_{cTE_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (5.34)$$

Испитајмо сада који TE_{mn} тип таласа има следећу критичну учестаност. У принципу, то мора бити талас TE_{20} или TE_{01} . Ако је $a/2 < b < a$, онда најнижу критичну учестаност, после TE_{10} типа таласа, има TE_{01} тип таласа,

$$f_{cTE_{01}} = \frac{1}{2b\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (5.35)$$

Међутим, ако је $b < a/2$, најнижу критичну учестаност после доминантног типа таласа има TE_{20} тип таласа,

$$f_{cTE_{20}} = \frac{1}{a\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (5.36)$$



Слика 5.2. Линије електричног поља (—) и магнетског поља (---) неких TE и TM типова таласа у уздужном и попречном пресеку правоугаоног таласовода.

Стандардни таласоводи се обично праве тако да је $b = a/2$. У том случају је $f_{\text{сTE}_{20}} = f_{\text{сTE}_{01}} = 2f_{\text{сTE}_{10}}$. Дакле, у опсегу учестаности од једне октаве, од $f_{\text{сTE}_{10}}$ до $2f_{\text{сTE}_{10}}$, од свих TE_{mn} типова таласа у таласоводу се може простирати само доминантан тип таласа. (Видећемо да се у том опсегу не може простирати ниједан од TM_{mn} типова таласа.)

С обзиром да је доминантни тип таласа најважнији, наводимо изразе за компоненте поља овог типа таласа:

$$H_z(x, y, z) = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \exp(-j\beta z), \quad (5.37)$$

$$E_y(x, y, z) = -j\omega\mu H_0 \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \exp(-j\beta z), \quad (5.38)$$

$$H_x(x, y, z) = j\beta H_0 \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \exp(-j\beta z), \quad (5.39)$$

док су остале компоненте поља једнаке нули.

5.2.2. ТМ таласи

Код ТМ таласа, на основу једначина (2.47) и (2.48), трансверзалне компоненте електричног и магнетског поља могу се изразити преко z -компоненте електричног поља као

$$E_x = -\frac{j\beta}{K^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{j\beta}{K^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (5.40)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{K^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{K^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (5.41)$$

Према једначини (2.50), скаларна функција E_z зависи од Декартових координата као

$$E_z(x, y, z) = E_z(x, y, 0) \exp(-\gamma z) \quad (5.42)$$

и задовољава таласну једначину (2.49), која у Декартовим координатама гласи

$$\Delta_z E_z + K^2 E_z = 0. \quad (5.43)$$

Као и код ТЕ таласа, електрично поље мора задовољавати граничне услове (5.6) на површи проводника таласовода. Међутим, сада је E_z тангенцијално на површ проводника, па мора бити $E_z = 0$ на сва четири зида таласовода (тј. за $x=0$, $x=a$, $y=0$ и $y=b$).

Таласна једначина (5.43) може се решити слично као код ТЕ таласа, методом раздвајања променљивих. Имамо најпре

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + K^2 E_z = 0. \quad (5.44)$$

Идентичним поступком као код анализе ТЕ таласа, заменом једначине (5.44) у (5.43), добијају се диференцијалне једначине (5.19), односно (5.20). Стога је опште решење за E_z дато са

$$E_z(x, y, z) = (C_1 \sin(k_x x) + C_2 \cos(k_x x))(C_3 \sin(k_y y) + C_4 \cos(k_y y)) \exp(-\gamma z). \quad (5.45)$$

Према граничним условима, сада мора бити $C_2 = 0$, $\sin k_x a = 0$, $C_4 = 0$ и $\sin k_y b = 0$.

Одавде се добијају услови идентични изразима (5.25). Ако означимо производ $C_1 C_3$ са E_0 , добија се, коначно,

$$E_z(x, y, z) = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(-j\beta z), \quad (5.46)$$

$$E_x(x, y, z) = -\frac{j\beta}{K^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(-j\beta z), \quad (5.47)$$

$$E_y(x, y, z) = -\frac{j\beta}{K^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-j\beta z), \quad (5.48)$$

$$H_x(x, y, z) = \frac{j\omega\epsilon}{K^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-j\beta z), \quad (5.49)$$

$$H_y(x, y, z) = \frac{j\omega\epsilon}{K^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(-j\beta z), \quad (5.50)$$

где је K дато изразом (5.31), а β изразом (5.32).

За различите бројеве m и n добијају се различити TM_{mn} типови таласа. Међутим, за разлику од ТЕ таласа, код ТМ таласа ни m , ни n не могу бити једнаки нули.

На слици 5.2 приказана је структура поља TM_{11} типа таласа.

Критична учестаност ТМ типа таласа је иста као за ТЕ тип таласа, тј.

$$f_{cTM_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad (5.51)$$

док се таласна импеданса TM_{mn} типа таласа може израчунати из једначине (2.71).

Најнижу критичну учестаност од TM_{mn} типова таласа има TM_{11} тип таласа. Очигледно, ова учестаност је виша и од $f_{cTE_{10}}$, и од $f_{cTE_{01}}$. Распоред критичних учестаности за стандардни таласовод ($b/a = 0,5$) приказан је на слици 5.3.

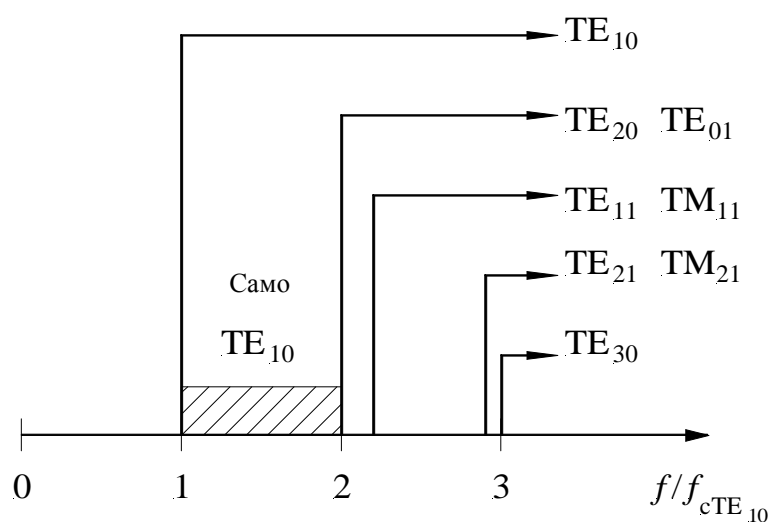
У опсегу учестаности од $f_{cTE_{10}}$ до $2f_{cTE_{10}}$ у таласоводу се може простирати само доминантни тип таласа. Ово је у пракси важно из следећег разлога. Начин спрезања таласовода са другим елементима микроталасних кола (на пример, са коаксијалним водовима) зависи од типа таласа. Ако на једном крају таласовода побудимо један тип таласа, на другом крају таласовода ћемо моћи да извучемо енергију из таласа само ако је систем за спрегу прилагођен том типу таласа. На пример, ако побудимо доминантни тип таласа, на месту пријема спрега мора бити прилагођена том типу таласа.

Када би таласовод био униформан (и без губитака), енергија коју пошаљемо једним типом таласа стигла би на други крај таласовода у потпуности у том истом типу таласа. Међутим, због неизбежних дисконтинуитета (савијутака, спојева и сличног), на сваком месту где таласовод није униформан структура поља одступа од оне коју има доминантни тип таласа. Такво поље се може, формално, представити као суперпозиција свих могућих типова таласа. Међутим, сви таласи чија је критична учестаност изнад радне учестаности не могу се простирати, док се таласи чија је критична учестаност довољно ниска могу простирати. Таласи који се побуђују на дисконтинуитетима, а могу се простирати, са собом односе део енергије. На тај начин на месту пријема енергија стиже у виду суперпозиције више типова таласа. Због спреге, међутим, на месту пријема из таласовода не можемо извући енергију свих тих типова таласа.

Простирање виших типова таласа (дакле, свих осим доминантног типа) може се спречити ако се радна учестаност узме у опсегу од $f_{cTE_{10}}$ до $2f_{cTE_{10}}$ (код стандардних таласовода). Стога тај опсег представља нормалан радни опсег таласовода. Видећемо касније, међутим, да ни цео тај опсег није технички употребљив због врло великих губитака који се јављају у близини критичне учестаности доминантног типа таласа.

Напоменимо да се за анализу стојећих таласа на таласоводу може, формално, применити исти апарат као код водова, само што сада улогу напона преузима трансверзално електрично поље, улогу струје преузима трансверзално магнетско поље, а улогу карактеристичне импедансе код водова преузима код таласовода таласна импеданса. С обзиром да су, код прогресивног таласа, трансверзалне компоненте

електричног и магнетског поља синфазне у једном попречном пресеку таласовода, у рачуну се може узети електрично и магнетско поље дуж било које линије паралелне z -оси. На пример, код доминантног типа таласа се може узети најјаче поље (за $x = a/2$), али се интензитет тог репрезентативног електричног поља може одабрати и узимајући у обзир снагу која се преноси таласоводом, као што ће бити објашњено у поглављу 8.



Слика 5.3. Распоред критичних учестаности TE_{mn} и TM_{mn} типова таласа за стандардни правоугаони таласовод ($b/a = 0,5$).

Таблица 5.1. Стандардни правоугаони таласоводи.

Тип		Опсег учестаности [GHz]		Димензије [mm]		Теоријско слабљење		Максимална снага [MW]
153 IEC-	WR-	од f_d	до f_g	a	b	@ f [GHz]	α [dB/m]	@ f_d – @ f_g
R3	2300	0,32	0,49	584,2	292,1	0,386	0,00078	153–212
R4	2100	0,35	0,53	533,4	266,7	0,422	0,00090	120–173
R5	1800	0,41	0,62	457,2	228,6	0,49	0,00113	93,4–131,9
R6	1500	0,49	0,75	381,0	190,5	0,59	0,00149	67,6–93,3
R8	1150	0,64	0,98	292,1	146,05	0,77	0,00222	35,0–53,8
R9	975	0,76	1,15	247,65	123,82	0,91	0,00284	27,0–38,5
R12	770	0,96	1,46	195,58	97,79	1,15	0,00405	17,2–24,1
R14	650	1,14	1,73	165,10	82,55	1,36	0,00522	11,9–17,2
R18	510	1,45	2,20	129,54	64,77	1,74	0,00749	7,5–10,7
R22	430	1,72	2,61	109,22	54,61	2,06	0,00970	5,2–7,5
R26	340	2,17	3,30	86,36	43,18	2,61	0,0138	3,1–4,5
R32	284	2,60	3,95	72,14	34,04	3,12	0,0189	2,2–3,2
R40	229	3,22	4,90	58,17	29,083	3,87	0,0249	1,6–2,2
R48	187	3,94	5,99	47,55	22,149	4,73	0,0355	1,4–2,0
R58	159	4,64	7,05	40,39	20,193	5,57	0,0431	0,79–1,0
R70	137	5,38	8,17	34,82	15,799	6,46	0,0576	0,56–0,71
R84	112	6,57	9,99	28,499	12,624	7,89	0,0794	0,35–0,46
R100	90	8,20	12,5	22,860	10,160	9,84	0,110	0,20–0,29
R120	75	9,84	15,0	19,050	9,525	11,8	0,1133	0,17–0,23
R140	62	11,9	18,0	15,799	7,898	14,2	0,176	0,12–0,16
R180	51	14,5	22,0	12,954	6,477	17,4	0,238	0,080–0,107
R220	42	17,6	26,7	10,668	4,318	21,1	0,370	0,043–0,058
R260	34	21,7	33,0	8,636	4,318	26,1	0,435	0,034–0,048
R320	28	26,4	40,0	7,112	3,556	31,6	0,583	0,022–0,031
R400	22	32,9	50,1	5,690	2,845	39,5	0,815	0,014–0,020
R500	19	39,2	59,6	4,775	2,388	47,1	1,060	0,011–0,015
R620	15	49,8	75,8	3,759	1,880	59,9	1,52	0,0063–0,0090
R740	12	60,5	91,9	3,099	1,549	72,6	2,03	0,0042–0,0060
R900	10	73,8	112	2,540	1,270	88,6	2,74	0,0030–0,0041
R1200	9	92,2	140	2,032	1,016	111	3,82	0,0018–0,0026
R1400	7	114	173	1,651	0,826	136,3	5,21	0,0012–0,0017
R1800	5	145	220	1,295	0,648	174,0	7,50	0,00071–0,0010
R2200	4	172	261	1,092	0,546	206,0	9,70	0,00051–0,0007
R2600	3	217	330	0,864	0,432	260,5	13,76	0,00035–0,0004