Grinova funkcija u elektrostatici i brzo promenljivom elektromagnetskom polju

Miodrag Tasić

Beograd, april 2003.

1. Pojam Grinove funkcije

Želimo da rešimo problem, u trodimenzionalnom prostoru, iskazan jednačinom

$$Lf(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}), \tag{1}$$

gde je L linearni diferencijalni operator (karakteristika sistema), $u(\mathbf{r})$ poznata funkcija (pobuda sistema), $f(\mathbf{r})$ funkcija koju želimo da odredimo (odziv sistema), a $\mathbf{r}$ je vektor u trodimenzionalnom prostoru.

Grinova funkcija operatora L obeležava se sa G i predstavlja odziv sistema na impulsnu pobudu koja se nalazi u tački sa koordinatom $\mathbf{r}'$,

$$LG(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{2}$$

Neka je υ oznaka proizvoljnog domena u trodimenzionalnom prostoru. Prostorna delta funkcija, $\delta(\mathbf{r})$, definisana je relacijama

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \ \text{ za } \ \mathbf{r} \neq 0, \quad \text{i} \quad \int_{\upsilon} \delta(\mathbf{r})\mathrm{d}\upsilon = 1 \ \text{ za } \mathbf{r} \in \upsilon. \tag{3}$$

Na osnovu prethodne definicije prostorne delta funkcije važi i

$$\int_{\upsilon'} u(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}\upsilon' = u(\mathbf{r}), \tag{4}$$

pri čemu υ' obuhvata domen funkcije u.

Ako pomnožimo jednačinu (2) sa $u(\mathbf{r}')$, a zatim formalno izvršimo integraciju po oblasti υ' koja obuhvata domen funkcije u, smatrajući da je $\mathbf{r}'$ promenljiva veličina, dobijamo

$$\int_{\upsilon'} LG(\mathbf{r},\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')\mathrm{d}\upsilon' = \int_{\upsilon'} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')\mathrm{d}\upsilon'. \tag{5}$$

Pošto se u izrazu sa leve strane prethodne jednačine integral i operator L odnose na različite veličine mogu da razmene mesta, a izraz sa desne strane je, imajući u vidu (4), jednak $u(\mathbf{r})$, pa se (5) svodi na

$$L\int_{\upsilon'} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')\mathrm{d}\upsilon' = u(\mathbf{r}). \tag{6}$$

Poređenjem desnih strana (1) i (6) direktno dobijamo da je rešenje jednačine (1)

$$f(\mathbf{r}) = \int_{\upsilon'} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')\mathrm{d}\upsilon'. \tag{7}$$

Iz (7) proizilazi jedan mogući način rešavanja problema opisanog jednačinom (1). Najpre, rešavanjem problema opisanog sa (2) dolazimo do Grinove funkcije. Zatim nalazimo traženo rešenje, f, korišćenjem jednačine (7).

2. Grinova funkcija za Poasonovu jednačinu

Poasonova jednačina za elektrostatički potencijal je oblika

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon}, \tag{8}$$

pa Grinovu funkciju tražimo iz jednačine

$$\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') . \tag{9}$$

U prethodnoj jednačini $\mathbf{r}'$ je konstantan vektor kojim je opisan položaj tačkastog izvora (naelektrisanja), a operator Δ se odnosi na koordinatu $\mathbf{r}$. Nakon uvođenja smene

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}', \tag{10}$$

gde $\mathbf{R}$ predstavlja vektor položaja u odnosu na tačkasto naelektrisanje, (9) pišemo u obliku

$$\Delta_{\mathrm{R}} G(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R}) . \tag{11}$$

Ovde se operator Δ_{R} odnosi na koordinatni sistem čiji je centar na mestu tačkastog naelektrisanja.

Pošto su u izrazu (11) i funkcija $\delta(\mathbf{R})$ i operator Δ_{R} radijalno simetrični, takva mora biti i Grinova funkcija, tj. važi

$$G(\mathbf{R}) = G(R) . \tag{12}$$

Ako iskoristimo i vezu između prostorne delta funkcije $\delta(\mathbf{R})$ i jednodimenzionalne delta funkcije $\delta(R)$,

$$\delta(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\delta(R)}{R^2}, \tag{13}$$

jednačina (11) se u sferičnom koordinatnom sistemu može prikazati u obliku

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial G}{\partial R}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\delta(R)}{R^2}, \tag{14}$$

odnosno, pošto je $\delta(R) = 0$ za R > 0,

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial G}{\partial R}\right) = 0 \text{ za } R > 0 . \tag{15}$$

Rešenje jednačine (15) je

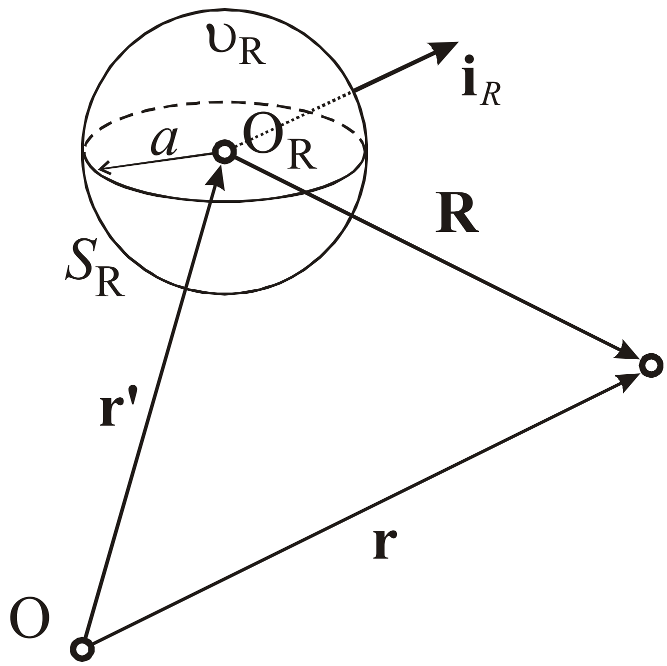
$$G = -\frac{A}{R} + B \text{ za } R > 0 . \tag{16}$$

Ovde su A i B konstante. Pošto $G \to 0$ kad $R \to \infty$ sledi da je $B = 0$.

Na prvi pogled, čini se da konstantu A možemo tražiti iz uslova

$$\int\limits_{\upsilon_R} \Delta_R G \,\mathrm{d}\upsilon_R = \int\limits_{\upsilon_R} \mathrm{div}_R(\mathrm{grad}_R G)\,\mathrm{d}\upsilon_R = \oint\limits_{S_R} \mathrm{grad}_R G\,\mathrm{d}\mathbf{S}_R = 1$$

koji proizilazi iz (11) za slučaj kada υ_R obuhvata koordinatni tačku O_R (slika 1). Poslednja jednakost u izrazu (15) predstavlja formulaciju teoreme Gaus-Ostrogradskog, pri čemu je S_R površ koja ograničava zapreminu υ_R. Međutim, funkcija G je **singularna** u $R = 0$, pa se teorema Gaus-Ostrogradskog **ne može primeniti**.



Slika 1

Zato se primenjuju sledeći rezon. Neka je $Z(R)$ generalisana funkcija definisana izrazom

$$Z(R) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H(R-\varepsilon)}{4\pi R} f(R), \tag{17}$$

gde je $f(R)$ dva puta diferencijabilna funkcija, a H Hevisajdova funkcija. Tada važi

$$\Delta Z = \frac{1}{4\pi R} f''(R) - f(0)\delta(\mathbf{R}). \tag{18}$$

Dokaz da (18) proizilazi iz (17) možemo dobiti nalaženjem

$$\Delta Z = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left[R^2 \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{H(R-\varepsilon)}{4\pi R} f(R)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left[R f(R)\delta(R-\varepsilon) + \big(R f'(R) - f(R)\big)H(R-\varepsilon)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left[\varepsilon f(\varepsilon)\delta(R-\varepsilon) + \big(R f'(R) - f(R)\big)H(R-\varepsilon)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left[\varepsilon f(\varepsilon)\delta'(R-\varepsilon) + \left(\varepsilon f'(\varepsilon) - f(\varepsilon)\right)\delta(R-\varepsilon) + \left(Rf''(R) + f'(R) - f'(R)\right)H(R-\varepsilon)\right].$$

Uvođenjem smene $A = \alpha/4\pi$ jednačina (16) se svodi na

$$G = -\frac{\alpha}{4\pi R} \text{ za } R > 0. \tag{19}$$

Ako sada G predstavimo preko generalisane generalisane funkcije (17), tako da važi za svako R, imamo

$$G = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{H(R-\varepsilon)}{4\pi R}(-\alpha)\right). \tag{20}$$

Pošto je u jednačini (20) $f(R) = -\alpha$, koristeći (18) dobijamo

$$\Delta_{\mathrm{R}} G = \alpha\,\delta(\mathbf{R}). \tag{21}$$

Poređenjem (11) i (21) zaključujemo da je $\alpha = 1$, pa na osnovu (19) dobijamo izraz za G u funkciji od R,

$$G = -\frac{1}{4\pi R}, \tag{22}$$

ili, imajući u vidu (10), u funkciji $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{23}$$

Na osnovu (7), rešenje jednačine (8) je

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\upsilon'}\frac{\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}\upsilon'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{24}$$

gde je υ' domen koji obuhvata sva zapreminska opterećenja.

3. Grinova funkcija za zakasnele potencijale

3.1 Kompleksni električni skalar-potencijal

Kompleksni električni skalar-potencijal V zadovoljava jednačinu

$$(\Delta+\beta^2)V(\mathbf{r})=-\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon}, \tag{25}$$

gde je $\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. Grinovu funkciju tražimo iz jednačine

$$(\Delta+\beta^2)G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{26}$$

Uvodeći smenu $\mathbf{R}$ = $\mathbf{r}$-$\mathbf{r}'$ u prethodnu jednačinu dobijamo

$$(\Delta_{\mathrm{R}}+\beta^2)G=\delta(\mathbf{R}). \tag{27}$$

Imajući u vidu radijalnu simetriju problema i vezu između prostorne i jednodimenzionalne delta funkcije (13) (sličnu proceduru sproveli smo kod Poasonove jednačine) jednačina (27) se svodi na

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial G}{\partial R}\right)+\beta^2 G=\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(R)}{R^2}\;. \tag{28}$$

Pošto važi relacija

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial G}{\partial R}\right)=\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(RG\right), \tag{29}$$

jednačinu (28) možemo prikazati u obliku

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}(RG)+\beta^2\left(RG\right)\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(R)}{R^2}. \tag{30}$$

Za $R > 0$, $\delta(R) = 0$, pa se (30) svodi na

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(RG)+\beta^2\left(RG\right)=0\,,\ \text{za}\ R>0. \tag{31}$$

Jednačina (31) je linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima za funkciju RG i njeno rešenje je

$$RG=k_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta R}+k_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}. \tag{32}$$

U prethodnoj jednačini prvi član sa desne strane predstavlja talas koji se kreće ka tačkastom izvoru, a drugi član sa desne strane predstavlja talas koji se kreće od tačkastog izvora. Realno postoji samo talas koji se kreće od tačkastog izvora, pa je $k_1 = 0$. Da bismo odredili konstantu k_2 iskoristićemo formalan pristup preko generalisane funkcije (17).

Izrazimo G iz jednačine (32) uvodeći smenu $k_2 = A/4\pi$,

$$G = \frac{A}{4\pi R}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}, \; R > 0. \tag{33}$$

Jednačinu (33) možemo učiniti važećom za sve vrednosti R definisanjem G kao generalisane funkcije (17),

$$G = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{AH(R-\varepsilon)}{4\pi R}e^{-\mathrm{j}\beta R}\right), \tag{34}$$

odakle, na osnovu (18), dobijamo

$$\Delta_{\mathrm{R}} G = -\beta^2 \frac{A}{4\pi R}e^{-\mathrm{j}\beta R} - A\delta(\mathbf{R}), \tag{35}$$

a prebacivanjem na levu stranu prvog člana sa desne strane jednačina (35) postaje

$$\left(\Delta_{\mathrm{R}} + \beta^2\right)G = -A\delta(\mathbf{R}). \tag{36}$$

Poređenjem (27) i (36) zaključujemo da je $A = -1$, pa za G konačno dobijamo

$$G = -\frac{1}{4\pi R}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}, \tag{37}$$

ili, u funkciji od $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$,

$$G = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{38}$$

Rešenje (25) sada možemo napisati u obliku

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\upsilon'}\frac{\rho(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\upsilon', \tag{39}$$

gde je υ' domen koji obuhvata sve izvore naelektrisanja.

3.2 Kompleksni magnetski vektor-potencijal

Kompleksni magnetski vektor-potencijal, $\mathbf{A}$, zadovoljava jednačinu

$$\left(\Delta + \beta^2\right)\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}. \tag{40}$$

Ova vektorska jednačina može se rastaviti na tri skalarne. Na primer, ako $\mathbf{A}$ razložimo na komponente u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, jednačina za x-komponentu glasi

$$\left(\Delta + \beta^2\right)A_x = -\mu J_x, \tag{41}$$

a analogne jednačine mogu se napisati i za y-komponentu i z-komponentu.

Kako je jednačina (41) formalno ekvivalentna jednačini (25) i Grinova funkcija je identična i data je jednačinom (38), a rešenje za A_x dobijamo u obliku

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon'} \frac{J_x(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\upsilon', \tag{42}$$

Analogna rešenja dobijamo za A_y i A_z. Vektorskim sabiranjem ove tri komponente dobijamo konačno rešenje

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\upsilon', \tag{43}$$

gde je υ' domen koji obuhvata sve izvore struje.