

# ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ)

26. јун 2023.

**Напомене.** Испит траје 180 минута и ради се самостално. Није дозвољено напуштање сале 60 минута од почетка испита. Писати искључиво хемијском оловком. Дозвољена је употреба непрограмабилних калкулатора. Дозвољена је употреба само овога папира и једне вежбанке, који се морају предати. Питања радити искључиво на овоме папиру, а задатке искључиво у вежбанци. Коначне одговоре на питања и тражена извођења уписати у одговарајуће кућице, уцртати у дијаграме или заокружити понуђене одговоре. Одговори без извођења се неће признати. Свако питање носи по 5 поена, а задатак по 20 поена.

**Попунити податке о кандидату у следећој табели. Исте податке написати и на омоту вежбанке.**

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ (попуњава кандидат)							КОЛОКВИЈУМ				
Индекс година/број		Презиме и име									
/							ИСПИТ				
ПИТАЊА					ЗАДАЦИ						
1.	2.	3.	4.	5.	6.	Укупно	1.	2.	Укупно	УКУПНО ПОЕНА	ОЦЕНА

## ПИТАЊА

**1. (а)** Написати изразе за дивергенцију и ротор магнетског вектор-потенцијала у споропроменљивом електромагнетском пољу. **(б)** Полазећи од потпуног система диференцијалних једначина за споропроменљиво електромагнетско поље у хомогеној линеарној средини и изрза добијених под (а), извести диференцијалну једначину коју задовољава магнетски вектор-потенцијал.

(а)	(б)
-----	-----

**2. (а)** Написати потпун систем диференцијалних једначина у комплексном облику за брзопроменљиво поље у нехомогеној линеарној средини у којој нема побудног поља ни побудних струја. **(б)** Полазећи од једначина под (а), извести једначину континуитета.

(а)	(б)
-----	-----

**3. (а)** Написати математички исказ Поинтингове теореме у домену  $v$ , ограниченом површи  $S$  и објаснити значење сваког члана. Домен је испуњен линеарним хомогеним диелектриком пермитивности  $\epsilon$ , пермеабилности  $\mu$  и специфичне проводности  $\sigma$ , а у свакој тачки домена познат је вектор побудних струја  $\mathbf{J}_i$ . **(б)** Претходни израз написати за случај када је површ  $S$  прекривена бесконачно танком савршено проводном фолијом.

(а)	(б)
-----	-----

**4.** Комплексни представник вектора јачине електричног поља простопериодичног електромагнетског таласа дат је изразом  $\underline{\mathbf{E}} = E_0 (5\mathbf{i}_x + j3\mathbf{i}_y + 4\mathbf{i}_z)$ , где је  $E_0$  константа. За овај вектор одредити: **(а)** ефективну вредност, **(б)** минимални интензитет и **(в)** максимални интензитет. **(г)** Како је овај вектор поларизован? Образложити одговор.

(а)	(б)	(в)	(г)
-----	-----	-----	-----

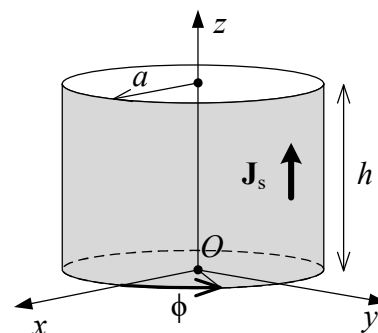
5. Раван униформан простопериодичан ТЕМ талас, учестаности  $f$ , простира се у линеарном хомогеном материјалу специфичне проводности  $\sigma$ , пермеабилности  $\mu_0$  и пермитивности  $\epsilon$ . Полазећи од израза за комплексни коефицијент простирања, извести изразе за коефицијент слабљења и фазни коефицијент у случају када је материјал добар диелектрик.

6. (а) Написати израз за вектор јачине електричног поља зрачења произвољне антене преко карактеристичне функције зрачења. (б) Написати израз за карактеристичну функцију зрачења жичане антене, ако је позната комплексна расподела струје у антени,  $\underline{I}(l)$ , где је  $l$  криволинијска координата дуж које лежи антена. Усвојити неопходне величине и нацртати слику.

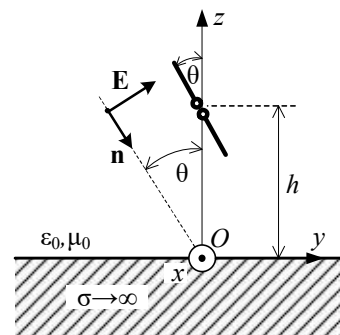
(а)	(б)
-----	-----

### ЗАДАЦИ

1. У вакууму постоји простопериодична струја, високе кружне учестаности  $\omega$ , само по омотачу цилиндра полупречника  $a$  и висине  $h$ , као на слици. Вектор густине струје дат је изразом  $\mathbf{J}_s = \sqrt{2}J_{s0}(z/a) \cdot \sin(\phi/2) \cos \omega t \mathbf{i}_z$ , где је  $J_{s0}$  константа,  $\beta = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ,  $0 \leq z \leq h$  и  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . (а) Одредити расподелу површинског и линијског наелектрисања на омотачу цилиндра. (б) Одредити комплексни вектор јачине индукованог електричног поља у тачки  $O$ .



2. На место пријема стиже раван униформан линијски поларизован ТЕМ талас, учестаности  $f$ , под углом  $\theta$  у односу на вертикалу, као на слици. Ефективна вредност електричног поља овог таласа је  $E$ , а вектор  $\mathbf{E}$  лежи у равни инциденције. Пријемна антена је полуталасни дипол који такође лежи у равни инциденције. Дипол је постављен под углом  $\theta$  у односу на вертикалу, а центар дипола се налази на висини  $h$  изнад савршено проводне равни. (а) Одредити изразе за векторе резултантног електричног и магнетског поља изнад равни. (б) Ако је  $f = 433\text{MHz}$ ,  $\theta = \pi/6$ ,  $E = 2,4\text{V/m}$  и  $h = 8/(f\sqrt{\epsilon_0\mu_0})$ , израчунати ефективну вредност емс индуковане у диполу.



### Напомена:

У цилиндричном координатном систему је  $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

**ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА И РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА  
ИСПИТА ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ),  
ОДРЖАНОГ 26. ЈУНА 2023. ГОДИНЕ**

**ПИТАЊА**

1. (a)  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . (б)  $\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$

2. (a)  $\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}}$ ,  $\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega \underline{\mathbf{D}}$ ,  $\text{div } \underline{\mathbf{D}} = \rho$ ,  $\text{div } \underline{\mathbf{B}} = 0$ ,  $\underline{\mathbf{D}} = \epsilon \underline{\mathbf{E}}$ ,  $\underline{\mathbf{H}} = \frac{\underline{\mathbf{B}}}{\mu}$ ,  $\underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}}$ . (б)  $\text{div } \underline{\mathbf{J}} = -j\omega \rho$ .

3. (a) 
$$\overbrace{\int_v -\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{E} \, dv}^{\text{Снага извора удомену}} = \overbrace{\int_v \sigma |\mathbf{E}|^2 \, dv}^{\text{Снага Цулових губитака у домену}} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left( \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}|^2 \right) dv}^{\text{Брзина промене ЕМ енергије у домену}} + \overbrace{\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}}^{\text{Брзина размене ЕМ енергије са околином}}.$$

(б) 
$$\overbrace{\int_v -\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{E} \, dv}^{\text{Снага извора удомену}} = \overbrace{\int_v \sigma |\mathbf{E}|^2 \, dv}^{\text{Снага Цулових губитака у домену}} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left( \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}|^2 \right) dv}^{\text{Брзина промене ЕМ енергије у домену}}.$$

4. (a)  $E = 5\sqrt{2} E_0$ . (б)  $E_{\min} = 3\sqrt{2} E_0$ . (в)  $E_{\max} = \sqrt{82} E_0$ . (г) Вектор је елиптички поларизован ( $0 < E_{\min} < E_{\max}$ ).

5.  $\alpha = 0,5 \sigma \sqrt{\mu_0 / \epsilon}$ ,  $\beta = 2\pi f \sqrt{\mu_0 \epsilon}$ .

6. (a)  $\underline{\mathbf{E}}_{zr} = \frac{jZ_0}{2\pi} \cdot \underline{I}_0 \cdot \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \underline{\mathbf{F}}$ . (б)  $\underline{\mathbf{F}} = \frac{\beta}{2} \mathbf{i}_r \times \left( \mathbf{i}_r \times \frac{1}{I_0} \int_L I(l) e^{j\beta r' \cdot \mathbf{i}_r} dl \right)$ , где је  $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  су вектори положаја посматране тачке и елементарног извора, респективно, а  $\underline{I}_0$  је комплексна струја на прикључцима антене.

**ЗАДАЦИ**

1. (a)  $\underline{\rho}_s = -\frac{J_{s0}}{j\omega a} \sin \frac{\phi}{2}$ ,  $\underline{Q}'_1(z=h) = \frac{J_{s0} h}{j\omega a} \sin \frac{\phi}{2}$ ,  $\underline{Q}'_2(z=0) = 0$ . (б)  $\underline{\mathbf{E}}_{\text{ind}} = \frac{\omega \mu_0 J_{s0}}{\pi \beta} \left( e^{-j\beta \sqrt{a^2 + h^2}} - e^{-j\beta a} \right) \mathbf{i}_z$ ,  $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ .

2. (a)  $\underline{\mathbf{E}}_{\text{rez}} = 2E e^{-j\beta y \sin \theta} (j \cos \theta \sin(\beta z \cos \theta) \mathbf{i}_y + \sin \theta \cos(\beta z \cos \theta) \mathbf{i}_z)$ ,  $\underline{\mathbf{H}}_{\text{rez}} = \frac{2E}{Z_0} e^{-j\beta y \sin \theta} \cos(\beta z \cos \theta) \mathbf{i}_x$ ,  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ,  $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ .

(б)  $\epsilon = \frac{\lambda}{\pi} |\underline{\mathbf{E}}_r \cdot \mathbf{F}| = \frac{\lambda}{\pi} \cdot EF(2\theta) \approx 0,43 \text{ V}$ .

- РЕЗУЛТАТИ ИСПИТА ЋЕ БИТИ ОБЈАВЉЕНИ ДО 3. ЈУЛА У 11:00 ЧАСОВА.
- УВИД У ЗАДАТКЕ (У СОБИ 63) ЈЕ 3. ЈУЛА ОД 11:00 ДО 11:30 ЧАСОВА.

Са предмета Електромагнетика